

УДК 338.92

ББК 65.9(2Р)30-2

Э40

DOI 10.36264/978-5-89665-403-2-2026-039

А в т о р ы:

Алексеев А.В., д.э.н. – предисловие, гл. 3, заключение; Базаров А.Б., к.э.н. – гл. 10; Баранов А.О., д.э.н. – гл. 4, гл. 7; Гильмундинов В.М., д.э.н. – гл. 10; Гореев А.В., к.э.н. – гл. 4; Дементьев Н.П., д.ф.-м.н. – гл. 6; Казанцева Л.К., к.и.н. – гл. 10; Казанцев С.В., д.э.н. – гл. 5; Колложнов Д.В., PhD in economics, к.э.н. – гл. 12; Колложнов Е.Д. – гл. 12; Комарова А.В., к.э.н. – гл. 9; Музыко Е.И., д.э.н. – гл. 8; Павлов В.Н., д.т.н. – гл. 7; Рыженков А.В., д.э.н. – гл. 11, приложение; Савина А.И., к.э.н. – гл. 10; Слепенкова Ю.М., к.э.н. – гл. 4; Тагаева Т.О., д.э.н. – гл. 10; Тесля П.Н., к.э.н. – гл. 2; Филимонова И.В., д.э.н. – гл. 9; Фомин Д.А., к.э.н. – гл. 1.

Рецензенты:

д.э.н. Н.И. Суслов, д.э.н. Н.М. Ибрагимов, к.э.н. М.А. Ягольницер

Э40

Экономика России в новой макроэкономической реальности: от структурных диспропорций к новой модели роста / под ред. А.В. Алексеева, Л.К. Казанцевой. – Новосибирск: Изд-во ИЭОПП СО РАН, 2026. – 426 с.

ISBN 978-5-89665-403-2

В монографии дается анализ новой макроэкономической реальности – ее производственной, финансовой, демографической, эколого-экономической составляющих – сложившейся под воздействием внешних и внутренних факторов. Рассматриваются вопросы создания диверсифицированной национальной экономики в противовес курсу на консервацию сырьевой модели развития. Внимание фокусируется на инструментах стратегического развития, на моделях поиска компромисса между целями экономической политики, на проблемах адаптации нефтегазового сектора к новым реалиям. Теоретико-методологическим фундаментом исследования стали передовые концепции моделирования экономической динамики, промышленных циклов и условий макроэкономической стабильности.

Монография подготовлена по плану НИР ИЭОПП СО РАН по проектам № 121040100281-8 «Методы и модели обоснования стратегии развития экономики России в условиях меняющейся макроэкономической реальности» и № 126020516495-3 «Методология и методика разработки и обоснования приоритетов инвестиционной, кредитно-денежной и фискальной политики структурной трансформации российской экономики в новых геополитических условиях»; адресована ученым-экономистам, работникам государственных служб, частных корпораций и учебных заведений.

УДК 338.92

ББК 65.9(2Р)30-2

ISBN 978-5-89665-403-2

© ИЭОПП СО РАН, 2026

© Коллектив авторов, 2026

Полная электронная копия издания расположена по адресу:

http://lib.ieie.nsc.ru/docs/2026/039-EconRus/Ekonomika_Rossii_v_Novoy_macrocon_realnosti.pdf

Глава 12

УСЛОВИЯ СТАБИЛЬНОСТИ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ ПРИ НЕОДНОРОДНОМ АДАПТИВНОМ ОБУЧЕНИИ В МОДЕЛЯХ ОБЩЕГО ЭКОНОМИЧЕСКОГО РАВНОВЕСИЯ

Учет ожиданий при моделировании – это то, что отличает экономику от других наук. Результирующая динамика модели во многом зависит от способа моделирования ожиданий. Современные динамические модели, применяемые для отработки последствий макроэкономической политики и построения прогнозов, в основе своей используют либо предположение о рациональных ожиданиях, либо предположение о совершенном прогнозе. Учет возможности различных видов ограниченно рационального поведения агентов при формировании ожиданий является естественным этапом развития экономической теории в сторону большей адекватности модельных построений реальной экономической действительности.

Экономические регуляторы, принимающие решения о параметрах макроэкономической политики, должны основывать свои действия на моделях, наиболее адекватных поведению реальных данных, т. е. учитывающих в том числе и ограниченную рациональность агентов при формировании ожиданий. Соответственно, им нужны ограничения на параметры политики, которые позволят гарантировать достижение желаемых регулятором результатов. Многие необходимые регулятору результаты, гарантирующие, например, существование и единственность и устойчивость динамики при разных формах ограниченной рациональности, все еще отсутствовали до настоящего времени. В своем исследовании мы находим именно такие условия и апробируем на моделях, описывающих реальную экономику.

Целью данного исследования являются: 1) развитие методов анализа макроэкономической динамики в условиях ограниченной рациональности экономических агентов при формировании ожиданий макроэкономических показателей, представленной в форме

адаптивного неоднородного эконометрического обучения, и 2) апробация их на моделях, описывающих реальную макроэкономическую динамику.

Для достижения поставленной цели в ходе исследования решались следующие задачи:

1) решить открытый вопрос, поставленный в работе [Honkapohja, Mitra, 2006]: найти условия стабильности равновесия при рациональных ожиданиях линейной структурно-неоднородной экономики при неоднородном адаптивном обучении агентов для четырех классов моделей: моделей без лагов и с лагами эндогенной переменной, и с t или $t-1$ – датировкой ожиданий, в виде которых может быть представлено подавляющее большинство существующих и перспективных линейных и линеаризованных экономических моделей с адаптивным обучением агентов, заданные только в терминах структуры модели, независимо от структуры обучения;

2) рассмотреть возможность получения наиболее практически применимых результатов по стабильности при возможных упрощениях модели и алгоритма обучения, таких как диагональная структура процесса для шоков, неоднородное *RLS*-обучение, структурно-однородная экономика, меньшее число агентов, одномерная и двумерная модель;

3) расширить анализ воздействия оптимальных правил монетарной политики и правил Тейлора в новокейнсианской модели на предмет стабильности равновесия при рациональных ожиданиях при адаптивном обучении, начатый в работе [Evans, Honkapohja, 2003] для случая однородного обучения, на случай неоднородного адаптивного обучения частного сектора, применив полученные условия стабильности;

4) рассмотреть малую структурно-неоднородную *DSGE*-модель экономики России с неоднородным адаптивным обучением экономических агентов, апробировать ее на реальных данных. Сравнить соответствие модели с неоднородным адаптивным обучением агентов и модели с однородным обучением и рациональными ожиданиями агентов реальным данным.

12.1. Неоднородное адаптивное (эконометрическое) обучение как способ моделирования ожиданий в экономике: постановка модели¹

Экономика отличается от других наук тем, что в ней огромную роль играют ожидания. Выбор правильной модели формирования ожиданий зачастую является ключевым фактором, определяющим результат моделирования с точки зрения соответствия имитационных данных статистическим, точности прогнозов и анализа последствий выбора той или иной экономической политики. Так, например, в настоящее время широко распространенный не только в академической среде, но и среди крупнейших центральных банков, подход *DSGE*-моделирования предполагает, что поведение экономических агентов определяется набором задач межвременной оптимизации, которые содержат ожидания, оказывающие влияние на динамику эндогенных переменных. Решение этих задач зависит от того, как моделируются ожидания поведения макроэкономических показателей.

Моделирование ожиданий далеко не самый простой вопрос в экономике, и на сегодняшний день существует огромное число способов их моделирования. Стандартно, в базовой постановке в *DSGE*-модели предполагается выполнение гипотезы о рациональных ожиданиях (*RE*) агентов, согласно которой ожидания формируются, полностью согласовываясь с моделью, описывающей экономическую динамику и в соответствии с применяемой экономической политикой, когда вся доступная информация используется эффективным образом. Гипотеза о *RE*, хотя и позволяет эффективно оценивать «глубокие» параметры модели, используя все ограничения на связи между уравнениями, задающими динамику модели, посредством согласующихся с моделью ожиданий, тем не менее не описывает задачу получения информации для раскрытия агентами экономики этих систематических связей между уравнениями. Это говорит о том, что ги-

¹ Авторы выражают искреннюю благодарность Богомоловой Анне Сергеевне, соавтору многих совместных работ в данном направлении, без которой это исследование бы не состоялось.

потеза о *RE* неверно или неправдоподобно ограниченно описывает экономику, что приводит к необходимости применения альтернативных подходов к формированию ожиданий в *DSGE*-моделях.

Одним из таких подходов является адаптивное эконометрическое обучение [Evans, Honkapohja, 2001]. Согласно этому подходу агенты рассматриваются как статистики или эконометристы, обновляющие свои прогнозные модели по мере поступления новой информации. Такой подход применяется, например, в исследовании [Slobodyan, Wouters, 2012] и улучшает соответствие имитированных моделью данных статистическим.

Обычно при применении адаптивного обучения в качестве модели формирования ожиданий, предполагается, что все агенты (или один репрезентативный агент) используют один конкретный тип алгоритма обучения. Таким образом, возникает вопрос – является ли стабильность равновесия при рациональных ожиданиях следствием такой однородности при обучении, верна ли гипотеза о существовании репрезентативного агента.

В литературе вопрос адаптивного обучения, и, в частности, более реалистичного в определенных случаях неоднородного адаптивного обучения, в применении к анализу результирующей макроэкономической динамики изучен недостаточно, хотя выбор того или иного способа моделирования ожиданий в модели способен оказывать решающую роль на результат всего исследования. Так, например, применительно к экономике России, необходимо учитывать, что разные группы агентов могут, в общем, по-разному формировать и пересматривать ожидания, что может потенциально приводить к не всегда однозначно предсказуемым последствиям применения той или иной макроэкономической политики.

Получение условий стабильности/нестабильности макроэкономической динамики при адаптивном обучении позволит заполнить эту лакуну в теории и практике применения адаптивного обучения в качестве модели формирования ожиданий.

Мы рассматриваем модели в общей постановке [Evans, Honkapohja, 2001], расширенной, чтобы учесть возможную структурную неоднородность модели и возможность формирования ожиданий в момент времени t . Общий класс таких линейных мо-

делей с S типами агентов, обладающими потенциально различными прогнозами, имеет вид:

$$x_t = \mu + \sum_{i=1}^d D_i x_{t-i} + \sum_{h=1}^S \sum_{a=0}^m \sum_{f=a}^n B_{af}^h \hat{E}_{t-a}^h x_{t-a+f} + \quad (12.1)$$

$$+ Cz_t + \xi v_t, B_{00}^h \equiv 0$$

$$z_t = Vz_{t-1} + \varepsilon_t, \quad (12.2)$$

где x_t — есть $n \times 1$ — вектор эндогенных переменных, $z_t - k \times 1$ — вектор экзогенных переменных; ε_t и v_t векторы независимых шоков белого шума; $\hat{E}_{t-a}^h x_{t-a+f}$ есть ожидания (нерациональные, в общем случае) эндогенных переменных агентом h ; а D_i, B_{af}^h, C, ξ — матрицы соответствующих размеров. Матрица V ($k \times k$) задана таким образом, чтобы VAR(1) процесс для z_t был стационарным с матрицей ковариаций $M_z = \lim_{t \rightarrow \infty} E z_t z_t'$.

Матрицы B_{af}^h определены как $B_{af}^h = \omega_h \cdot \tilde{B}_{af}^h$, где ω_h есть масса каждого типа агента h , $\sum \omega_h = 1$, а $\tilde{B}_{af}^h$ содержат структурные параметры, характеризующие данную экономику, и отражают реакцию агентов типа h на свои собственные прогнозы. Возможность для $\tilde{B}_{af}^h$ быть разными для различных типов агентов и определяет структурную неоднородность модели. Основная идея этого класса моделей состоит в том, что формируемые различными типами агентов ожидания эндогенных переменных линейно влияют на текущие значения этих переменных.

В литературе наиболее часто используются следующие примеры моделей из этого класса: Модель I (когда $d = 0, m = 1, n$ — любое, $B_{0f}^h \equiv 0$), Модель II (с $d = 1, m = 1, n = 2, B_{0f}^h \equiv 0$), Модель III (с $d = 0, m = 0, n$ — любое) и Модель IV (с $d = 1, m = 0, n = 1$), далее M I, II, III, IV, задаваемые соответственно как (12.2) и

$$\begin{aligned}
x_t = & \mu + \sum_{h=1}^S B_0^h \hat{E}_{t-1}^h x_t + \sum_{h=1}^S B_1^h \hat{E}_{t-1}^h x_{t+1} + \dots \\
& + \sum_{h=1}^S B_\tau^h \hat{E}_{t-1}^h x_{t+\tau} + Cz_t + \xi v_t \quad \text{для М I,} \quad (12.3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_t = & \mu + Dx_{t-1} + \sum_{h=1}^S B_0^h \hat{E}_{t-1}^h x_t + \\
& + \sum_{h=1}^S B_1^h \hat{E}_{t-1}^h x_{t+1} + Cz_t + \xi v_t \quad \text{для М II,} \quad (12.4)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_t = & \mu + \sum_{h=1}^S B_1^h \hat{E}_t^h x_{t+1} + \dots \\
& + \sum_{h=1}^S B_\tau^h \hat{E}_t^h x_{t+\tau} + Cz_t + \xi v_t \quad \text{для М III,} \quad (12.5)
\end{aligned}$$

$$x_t = \mu + Dx_{t-1} + \sum_{h=1}^S B_1^h \hat{E}_t^h x_{t+1} + Cz_t + \xi v_t, \quad (12.6)$$

с информационным множеством $(1, x'_{t-1}, z'_t)$ для М IV,

в которых агенты каждого типа h при формировании ожиданий основываются на воспринимаемом ими законе движения (*PLM*):

$x_t = q_{h,t-1} + r_{h,t-1} z_{t-1}$ (для М I), $x_t = q_{h,t-1} + r_{h,t-1} y_{t-1} + s_{h,t-1} z_{t-1}$

(для М II), $x_t = q_{h,t} + r_{h,t} z_{t-1}$ (для М III), $x_t = q_{h,t} + r_{h,t} y_{t-1} + s_{h,t} z_t$

(для М IV). *PLM*, соответствующие по структуре равновесию при рациональных ожиданиях (*REE*) с минимальным числом переменных состояния (далее, *MSV REE*), обычно рассматриваются в качестве отправной точки моделирования, однако на практике используют и другие виды *PLM*, отражающие возможность неверной спецификации модели агентами в силу ограниченности данных или из-за отсутствия у них верного представления об экономике.

После подстановки прогнозов каждого агента на основе *PLM* в сокращенную форму модели получаем действительный закон движения (*ALM*) модели, соответствующий заданному *PLM*. Соответствующее отображение из параметров *PLM*, называемых убеждениями $\Psi_{h,t}$ ($\Psi'_{h,t-1} = (q_{h,t-1}, r_{h,t-1})$ для М I, $\Psi'_{h,t-1} = (q_{h,t-1}, r_{h,t-1}, s_{h,t-1})$ для М II, $\Psi'_{h,t-1} = (q_{h,t}, r_{h,t})$ для М III и $\Psi'_{h,t} = (q_{h,t}, r_{h,t}, s_{h,t})$ для М IV в параметры *ALM* называется *T*-отображением, $T(\Psi_t)$, $\Psi'_t = (\Psi'_{1,t}, \dots, \Psi'_{S,t})$. Таким образом, решение MSV REE может быть найдено как $T(\Psi) = \Psi_h$.

В рассмотренных выше классах моделей, в общем случае, предполагается, что агенты при формировании и обновлении ожиданий задействуют неоднородное смешанное *RLS/SG* обучение (*RLS* – рекурсивный метод наименьших квадратов, используется агентами $h = \overline{1, S_0}$, *SG* – метод стохастического градиента, используется агентами $h = \overline{S_0 + 1, S}$):

$$\begin{aligned} \Psi_{h,t+1} &= \Psi_{h,t} + \gamma_{h,t+1} S_{h,t+1}^{-1} w_t (x_{t+1} - \Psi'_{h,t} w_t)', \quad h = \overline{1, S_0} \text{ (RLS)}, \\ S_{h,t+1} &= S_{h,t} + \gamma_{h,t+1} (w_t w_t' - S_{h,t}) \end{aligned} \quad (12.7)$$

$$\Psi_{h,t+1} = \Psi_{h,t} + \gamma_{h,t+1} w_t (x_{t+1} - \Psi'_{h,t} w_t)', \quad h = \overline{S_0 + 1, S} \text{ (SG)}, \quad (12.8)$$

где $w_t' = (1, z_t')$ для М I, $w_t' = (1, x_t', z_t')$ для М II;

$$\begin{aligned} \Psi_{h,t+1} &= \Psi_{h,t} + \gamma_{h,t+1} S_{h,t+1}^{-1} w_t (x_t - \Psi'_{h,t} w_t)', \quad h = \overline{1, S_0} \text{ (RLS)}, \\ S_{h,t+1} &= S_{h,t} + \gamma_{h,t+1} (w_t w_t' - S_{h,t}) \end{aligned} \quad (12.9)$$

$$\Psi_{h,t+1} = \Psi_{h,t} + \gamma_{h,t+1} w_t (x_t - \Psi'_{h,t} w_t)', \quad h = \overline{S_0 + 1, S} \text{ (SG)}, \quad (12.10)$$

где $w_t' = (1, z_t')$ для М III, $w_t' = (1, x_{t-1}', z_t')$ для М IV.

Разные типы алгоритмов обучения, используемых агентами (*RLS* и *SG*), различное начальное восприятие (в виде разных начальных значений для алгоритмов обучения для разных аген-

тов), разные доли агентов, использующих тот или иной алгоритм обучения – все это характеристики неоднородности в обучении. К ним также относятся и разные скорости реагирования на новую информацию, задаваемые степенями инерции $\delta_h > 0$, постоянными коэффициентами перед детерминистической убывающей последовательностью коэффициентов приращения в алгоритме обучения γ_t , общей для всех агентов, $\delta_h \dot{\gamma}_{h,t} = \delta_h \gamma_t, \forall h$, удовлетворяющей стандартным условиям, задаваемым в работе [Giannitsarou, 2003], которые, как предполагается, выполняются, чтобы гарантировать сходимость к *REE* модели, записанной в форме стохастического рекурсивного алгоритма (*SRA*).

Большинство экономических моделей с адаптивным обучением (и все классы моделей, рассматриваемых в данной главе) можно записать в стандартной форме *SRA*, свойства сходимости которого изучаются методами теории стохастической аппроксимации, изложенными в работах [Benveniste et al, 1990; Evans, Honkapohja, 1998, 2001]:

$$\theta_t = \theta_{t-1} + \gamma_t H(\theta_{t-1}, X_t) + \gamma_t^2 \rho_t(\theta_{t-1}, X_t), \quad (12.11)$$

$$X_t = A(\theta_{t-1})X_{t-1} + B(\theta_{t-1})W_t, \quad (12.12)$$

где θ_t – есть вектор рекурсивно обновляемых параметров (называемых убеждениями), который в типичных алгоритмах адаптивного обучения (*RLS*, *SG*) включает в себя коэффициенты регрессии и элементы матрицы вторых моментов. Второе уравнение (12.12) дает закон движения переменной состояния в модели, W_t – случайная переменная шока.

При определенных условиях регулярности условия сходимости θ_t к равновесию $\bar{\theta}$ (задаваемому *MSV REE*) определяются условиями стабильности ассоциированного ОДУ:

$$d\theta/d\tau = h(\theta), \text{ где } h(\theta) = \lim_{t \rightarrow \infty} EH(\theta, \hat{X}_t(\theta))$$

$$\text{для } \hat{X}_t = A(\theta)\hat{X}_{t-1} + B(\theta)W_t. \quad (12.13)$$

Записав соответствующее *SRA* конкретной модели ассоциированное ОДУ (12.13), свойства локальной стабильности последнего можно использовать в качестве свойств локальной стабильности при обучении равновесия модели. Стабильность *MSV REE* при смешанном *RLS/SG* обучении для всех классов моделей определяется стабильностью соответствующего ассоциированного ОДУ – мы определяем его как *HE*-стабильность:

$$d\Psi_h/d\tau = \delta_h(T(\Psi) - \Psi_h), \quad h = \overline{1, S_0}, \quad (12.14)$$

$$d\Psi_h/d\tau = \delta_h M_w(T(\Psi) - \Psi_h), \quad h = \overline{S_0 + 1, S}, \quad (12.15)$$

где $T(\Psi)$ – отображение из параметров *PLM* в параметры действительного закона движения (*ALM*); $M_w = \lim_{t \rightarrow \infty} E w_t w_t'$ – матрица вторых моментов w_t .

12.2. Общие критерии и достаточные условия стабильности экономической динамики при неоднородном адаптивном обучении¹

Используя матрицы первых производных (якобианы) для правых частей ассоциированного ОДУ (12.14), (12.15), мы выводим общие критерии стабильности при смешанном *RLS/SG* обучении (подобно [Honkapohja, Mitra, 2006]) для всех классов моделей.

В силу структуры модели, все якобианы выглядят как $\Delta \cdot \Phi$, где Δ – положительно-диагональная матрица. Таким образом, все условия стабильности, требуют *D*-стабильности некоторой матрицы (матриц) Φ , а это позволяет формулировать их, не зависящими от параметров матрицы Δ , что означает стабильность, не зависящую от неоднородности в обучении. Среди подходов к *D*-стабильности (представленных в работе [Johnson, 1974]) в статье [Колужнов, 2011] выделяется подход, основанный на теореме Ляпунова, подход,

¹ Результаты этого раздела были отражены в статье [Богомолова, Колужнов, 2019]. Строгие доказательства приводимых здесь утверждений можно посмотреть в данной статье.

основанный на отрицательной доминантной диагонали, подход, основанный на альтернативном определении D -стабильности, подход, основанный на характеристическом уравнении, подход, основанный на условиях Раута-Гурвица. Мы применяем эти подходы для получения условий стабильности, не зависящих от неоднородности при обучении, в двух последующих разделах, используя результаты по якобианам, полученные в данном разделе.

Мы также уточняем определение связанного с D -стабильностью понятия δ -стабильности, введенного в статье [Колюжнов, 2011]: значение понятия δ -стабильности для неоднородного обучения подобно понятию E -стабильности, которое является условием асимптотической устойчивости равновесия при рациональных ожиданиях (REE) при однородном RLS обучении. В уточненном нами определении δ -стабильность является сильной δ -стабильностью, т.е. стабильностью структурно неоднородной экономики, независимой от всех типов характеристик обучения: различного начального восприятия, структуры обучения и степеней инерции. В то же время мы даем определение слабой δ -стабильности как стабильности, которая не зависит от различного начального восприятия и степеней инерции, но зависит от структуры обучения, что позволяет получить более точные условия в моделях с фиксированной структурой обучения.

Также существенно облегчает получение результатов стабильности и предположение о диагональной структуре процесса шоков:

$$\begin{aligned} z_t &= Vz_{t-1} + \varepsilon_t, \\ V &= \text{diag}(\rho_1, \dots, \rho_k), M_z = \lim_{t \rightarrow \infty} Ez_t z_t' = \\ &= \text{diag}(\sigma_1^2 / (1 - \rho_1^2), \dots, \sigma_k^2 / (1 - \rho_k^2)) \end{aligned} \quad (12.16)$$

которое является обычной практикой в экономическом моделировании.

Критерии и достаточные условия δ -стабильности, представленные одновременно в терминах структурной неоднородности и неоднородности при обучении, полученные нами на основе анализа условий стабильности ассоциированного ОДУ (12.14), (12.15), можно для удобства представить в виде таблицы (табл. 12.1).

Критерии и достаточные условия стабильности в терминах матриц Якоби

Предложения и модели	Критерий (сильной) δ -стабильности	Достаточные условия (слабой) δ -стабильности	Критерий (сильной) δ -стабильности	Достаточные условия (слабой) δ -стабильности
Предположения в постановке	Общий случай, (12.2) $\forall S_0 = \overline{1, S},$ $\forall \delta_h > 0, h = \overline{1, S}$ в (12.7), (12.8), (12.9), (12.10)	Неоднородное RLS обучение, (12.2) $S_0 = S,$ $\forall \delta_h > 0, h = \overline{1, S}$ в (12.7), (12.8), (12.9), (12.10)	Диагональная структура процесса шоков (12.16) $\forall S_0 = \overline{1, S},$ $\forall \delta_h > 0, h = \overline{1, S}$ в (12.7), (12.8), (12.9), (12.10)	Неоднородное RLS обучение и диагональная структура процесса шоков (12.16) $S_0 = S,$ $\forall \delta_h > 0, h = \overline{1, S}$ в (12.7), (12.8), (12.9), (12.10)
Модели без лага, Модели I и III	$\Delta_{LF} \Phi_{LF}$ Критерий 12.1 (12.17), (12.18)		$\Delta_1 \Phi_{\rho_l}$ Критерий 12.4 (12.20), (12.25)	
Модели с лагом, Модели II и IV	$\Delta_{LF} \Phi_{LF}$ Критерий 12.2 (12.17), (12.18), (12.19)	$\Delta_1 \Phi, \Delta_x \Phi_r, \Delta_z \Phi_v$ Утверждение 12.3, (12.20), (12.21), (12.22), (12.23), (12.24)		$\tilde{\Delta}_1 \Phi_{\rho_l}, \Delta_x \Phi_r$ Утверждение 12.5 (12.20), (12.24), (12.26)

В клетках (табл. 12.1) указаны для каждого критерия и достаточных условий δ -стабильности (с учетом предположений и возможных упрощений в постановке модели и алгоритме обучения) их название, выражения для соответствующих матриц Якоби, действительные части собственных чисел которых должны быть отрицательны, и номера формул, в которых эти матрицы и предположения (упрощения) определяются.

$$\Delta_{LF} = \text{diag}(\delta_1 I, \dots, \delta_S I), \quad (12.17)$$

$$\Phi_{LF} = \begin{pmatrix} (F^1 - I) & \dots & F^{S_0} & F^{S_0+1} & \dots & F^S \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ F^1 & \dots & (F^{S_0} - I) & F^{S_0+1} & \dots & F^S \\ LF^1 & \dots & LF^{S_0} & (LF^{S_0+1} - L) & \dots & LF^S \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ LF^1 & \dots & LF^{S_0} & LF^{S_0+1} & \dots & (LF^S - L) \end{pmatrix}, \quad (12.18)$$

где для моделей без лагов (М I и III): ($B_0^h \equiv 0$ для М III).

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & M_z \end{pmatrix} \otimes I_n, \quad F^h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & V'^\tau \end{pmatrix} \otimes B_\tau^h + \dots + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & V' \end{pmatrix} \otimes B_1^h + I_{k+1} \otimes B_0^h,$$

для моделей с лагом (М II и IV): ($B_0^h \equiv 0$ для М IV).

$$L = M_{1xz} \otimes I_n, \quad M_{1xz} = \begin{pmatrix} M_{1x} & 0 \\ 0 & M_z \end{pmatrix},$$

$$F^h = \begin{pmatrix} B_1^h + (B_0^h + B_1^h \bar{r}) & \bar{q}' \otimes B_1^h & 0 \\ 0 & \bar{r}' \otimes B_1^h + I_n \otimes (B_0^h + B_1^h \bar{r}) & 0 \\ 0 & \bar{s}' \otimes B_1^h & V' \otimes B_1^h + I_k \otimes (B_0^h + B_1^h \bar{r}) \end{pmatrix}$$

$$D + \left(\sum_{h=1}^S B_0^h \right) \bar{r} + \left(\sum_{h=1}^S B_1^h \right) \bar{r}^2 = \bar{r}, \quad (12.19)$$

$$\Delta_1 = \text{diag}(\delta_1 I_n, \dots, \delta_S I_n), \quad \Delta_x = \text{diag}(\delta_1 I_{n^2}, \dots, \delta_S I_{n^2}), \quad (12.20)$$

$$\Delta_z = \text{diag}(\delta_1 I_{nk}, \dots, \delta_S I_{nk}). \quad (12.21)$$

$$\Phi = \begin{pmatrix} B_0^1 + B_1^1 + B_1^1 \bar{r} - I_n & \cdots & B_0^S + B_1^S + B_1^S \bar{r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B_0^1 + B_1^1 + B_1^1 \bar{r} & \cdots & B_0^S + B_1^S + B_1^S \bar{r} - I_n \end{pmatrix} \quad (12.22)$$

$$\Phi_V = \begin{pmatrix} V' \otimes B_1^1 + I_k \otimes (B_0^h + B_1^h \bar{r}) - I_{nk} & \cdots & V' \otimes A_1^S + I_k \otimes (B_0^S + B_1^S \bar{r}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ V' \otimes B_1^1 + I_k \otimes (B_0^h + B_1^h \bar{r}) & \cdots & V' \otimes A_1^S + I_k \otimes (B_0^S + B_1^S \bar{r}) - I_{nk} \end{pmatrix} \quad (12.23)$$

$$\Phi_r = \begin{pmatrix} \bar{r}' \otimes B_1^1 + I_n \otimes (B_0^1 + B_1^1 \bar{r}) - I_{n^2} & \cdots & \bar{r}' \otimes B_1^S + I_n \otimes (B_0^S + B_1^S \bar{r}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{r}' \otimes B_1^1 + I_n \otimes (B_0^1 + B_1^1 \bar{r}) & \cdots & \bar{r}' \otimes B_1^S + I_n \otimes (B_0^S + B_1^S \bar{r}) - I_{n^2} \end{pmatrix} \quad (12.24)$$

$$\Phi_{\rho_l} = \begin{pmatrix} B_0^1 + \rho_l B_1^1 + \dots + \rho_l^\tau B_\tau^1 - I_n & \cdots & B_0^S + \rho_l B_1^S + \dots + \rho_l^\tau B_\tau^S \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B_0^1 + \rho_l B_1^1 + \dots + \rho_l^\tau B_\tau^1 & \cdots & B_0^S + \rho_l B_1^S + \dots + \rho_l^\tau B_\tau^S - I_n \end{pmatrix},$$

$$\forall l = \overline{0, k}, (\rho_0 = 1) \quad (12.25)$$

$$\tilde{\Phi}_{\rho_l} = \begin{pmatrix} B_0^1 + \rho_l B_1^1 + B_1^1 \bar{r} - I_n & \cdots & B_0^S + \rho_l B_1^S + B_1^S \bar{r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B_0^1 + \rho_l B_1^1 + B_1^1 \bar{r} & \cdots & B_0^S + \rho_l B_1^S + B_1^S \bar{r} - I_n \end{pmatrix},$$

$$\forall l = \overline{0, k}, (\rho_0 = 1) \quad (12.26)$$

причем $B_0^h \equiv 0$ для М II и IV.

12.3. Условия стабильности экономической динамики в терминах агрегированной экономики¹

Условия стабильности соответствующего ассоциированного ОДУ позволили нам в предыдущем разделе получить общие критерии и достаточные условия *HE*- и δ -стабильности при неодно-

¹ Результаты этого раздела были отражены в статье [Богомолова, Колужнов, 2020]. Строгие доказательства приводимых здесь утверждений можно посмотреть в данной статье.

родном обучении для всех классов рассматриваемых моделей в терминах стабильности соответствующих якобианов, представленные в смешанных терминах как структурной неоднородности, так и неоднородности при обучении (см. табл. 12.1). В данном разделе, используя подход отрицательной доминантной диагонали к D -стабильности, мы получаем необходимые условия стабильности, не зависящие от неоднородности в обучении. Сперва мы приводим их в терминах существования взаимосвязанных весов агрегирования эндогенных переменных и ожиданий по типам агентов, а затем и в терминах E -стабильности агрегированной экономики.

Основная идея подхода данного раздела заключается в построении алгоритма агрегирования экономики, задаваемой классами моделей, при помощи специальных операторов агрегирования на каждом этапе. Этот алгоритм позволяет получить агрегированные экономики, определяющие δ -стабильность исходных экономик, сводя анализ стабильности $MSV\ REE$ при неоднородном обучении при различных (любых) степенях инерции к получению условия D -стабильности соответствующих матриц в якобианах в Утверждениях 12.1–12.5 предыдущего раздела. Эти агрегированные экономики будут иметь вид $M\ I$, без лагов и с $t-1$ – датировкой ожиданий, для которой в статье [Колюжнов, 2011] уже получены достаточные условия δ -стабильности в терминах предельно агрегированной экономики при помощи подхода отрицательной доминантной диагонали. Подобные достаточные условия δ -стабильности получаются и в нашем (общем) случае.

Первый шаг алгоритма состоит в применении ко всем моделям I , II , III , IV оператора сопоставления каждой модели, ассоциированной «безлаговой» модели с $t-1$ – датировкой ожиданий, которая имеет такие же условия сходимости к $MSV\ REE$, что и исходная модель. Полученная в результате модель задается следующим определением.

Определение 12.1. Ассоциированная «безлаговая» модель с $t-1$ – датировкой ожиданий, соответствующая $M\ I$ (II , III , IV) (с таким же асимптотическим поведением, как и $M\ I$ (II , III , IV), соответственно), где коэффициент при лаговой переменной зафиксирован в значении $MSV\ REE$ (для $M\ II$, IV) записывается как (12.2) и

$$\text{для М I: } x_t = \mu + \sum_{h=1}^S B_0^h \hat{E}_{t-1}^h x_t + \sum_{h=1}^S B_1^h \hat{E}_{t-1}^h x_{t+1} + \dots + \sum_{h=1}^S B_\tau^h \hat{E}_{t-1}^h x_{t+\tau} + Cz_t + \xi v_t,$$

$$\text{для М II: } x_t = \mu + \sum_{h=1}^S (B_0^h + B_1^h \bar{r}) \hat{E}_{t-1}^h x_t + \sum_{h=1}^S B_1^h \hat{E}_{t-1}^h x_{t+1} + Cz_t + \xi v_t,$$

$$\text{для М III: } x_t = \mu + \sum_{h=1}^S B_1^h \hat{E}_{t-1}^h x_{t+1} + \dots + \sum_{h=1}^S B_\tau^h \hat{E}_{t-1}^h x_{t+\tau} + CP^{-1} z_t + \xi v_t,$$

$$\text{для М IV: } x_t = \mu + \sum_{h=1}^S (B_1^h \bar{r}) \hat{E}_{t-1}^h x_t + \sum_{h=1}^S B_1^h \hat{E}_{t-1}^h x_{t+1} + CP^{-1} z_t + \xi v_t.$$

На втором шаге алгоритма применяется оператор агрегирования в предельную агрегированную экономику для каждой ассоциированной безлаговой модели с $t-1$ – датировкой ожиданий аналогично агрегированию, использованному в статье [Колюжнов, 2011]. Агрегирование происходит при помощи весов агрегирования эндогенных переменных

$$\chi_i > 0, \sum_{i=1}^n \chi_i = 1, \quad (12.27)$$

и весов агрегирования по типам агентов

$$\eta_h > 0, \sum_{h=1}^S \eta_h = 1, \quad (12.28)$$

обозначая через b_{ij}^h элемент i -й строки и j -го столбца матрицы B^h . Мы также рассматриваем предельную агрегированную экономику, которая ограничивает сверху все возможные экономики с различными знаками b_{ij}^h , агрегированные с помощью весов χ и η . Это исходная агрегированная модель, записанная в абсолютных значениях.

На третьем шаге нашего алгоритма для того чтобы применить результаты, полученные в статье [Колюжнов, 2011] с использованием подхода отрицательной доминантной диагонали, которые предполагают экономику с одним ожиданием, к построенным предельным агрегированным экономикам для ассоциированных «безлаговых» моделей с $t-1$ – датировкой ожиданий, соответствующих М I (II, III, IV), применяется оператор агрегирования в эко-

номику с одним ожиданием текущего значения эндогенной переменной. Все вперед смотрящие ожидания при этом агрегируются в одно ожидание текущего значения эндогенной переменной. Такое агрегирование ожиданий во времени соответственно учитывает матрицу авторегрессионного процесса для шоков V и для моделей с лагом (М II и IV) матрицу $\bar{F}$ из формулы (12.19), определяющую, как x_t зависит от x_{t-1} в *MSV REE*. Эту межвременную связь ожиданий эндогенной переменной при недиагональной структуре матриц V и $\bar{F}$ можно учитывать, агрегируя как по строкам матриц V и $\bar{F}$, так и по столбцам. Получаемые в результате такого агрегирования модели задаются следующим определением.

Определение 12.2. Для данных весов агрегирования (12.27) и (12.28) соответствующее множество экономик с ожиданием текущего значения эндогенной переменной для предельной агрегированной экономики для ассоциированной «безлаговой» модели с $t-1$ – датировкой ожиданий, соответствующей М I (II, III, IV), записывается как

для М I и II (далее АМ I (II)):

$$x_t^{AGabs} = \sum_i \chi_i |\mu_i| + \beta_{avl}^{AGabs}(\chi, \eta) \hat{E}_{avl, t-1}^{AGabs} x_t^{AGabs} + \left| \sum_i (\chi_i C^i) \varepsilon_t \right| + \left| \sum_i (\chi_i \xi^i) \nu_t \right|$$

для М III и IV (далее АМ III (IV)):

$$x_t^{AGabs} = \sum_i \chi_i |\mu_i| + \beta_{avl}^{AGabs}(\chi, \eta) \hat{E}_{avl, t-1}^{AGabs} x_t^{AGabs} + \left| \sum_i (\chi_i (CP^{-1})^i) \varepsilon_t \right| + \left| \sum_i (\chi_i \xi^i) \nu_t \right|, \text{ где}$$

$$\beta_{avl}^{AG}(\chi, \eta) = \beta_0^{AGabs}(\chi, \eta) + \rho_l^1 \beta_1^{AGabs}(\chi, \eta) + \dots + \rho_l^\tau \beta_\tau^{AGabs}(\chi, \eta), \text{ где}$$

агрегированное взвешивание ожиданий задано как

$$\rho_l^r = \sum_{m=1}^k |v_{lm}^r| \text{ (по строкам } V) \text{ или } \rho_l^r = \sum_{m=1}^k |v_{ml}^r|,$$

(по столбцам V) или

$$\rho_l^1 = \sum_{m=1}^n |\bar{r}_{lm}| \text{ (по строкам } \bar{F}) \text{ (для М II, IV) или } \rho_l^1 = \sum_{m=1}^n |\bar{r}_{ml}|$$

(по столбцам $\bar{F}$) (для М II, IV),

$$\hat{E}_{avl, t-1}^{AGabs} x_t^{AGmod} = \left(\beta_{avl}^{AGabs}(\chi, \eta) \right)^{-1} \sum_{r=0}^{\tau} \beta_r^{AGabs}(\chi, \eta) \hat{E}_{t-1}^{AGabs} x_{t+r}^{AGabs},$$

где $\tau = 1$ для М II и IV.

Предельный агрегированный коэффициент $\beta_{avl}^{AG}(\chi, \eta)$ – это коэффициент перед ожиданием эндогенной переменной j в агрегированной экономике, состоящей из единственного агента типа h . Для М I и III (с $b_{0ij}^h \equiv 0$) он имеет вид $\sum_i \chi_i |b_{0ij}^h| + \rho_l^1 \sum_i \chi_i |b_{1ij}^h| + \dots + \rho_l^\tau \sum_i \chi_i |b_{\tau ij}^h|$, для М II и IV (с $a_{0ij}^h \equiv 0$) – $\sum_i \psi_i \left(\rho_l^1 |b_{1ij}^h| + |b_{0ij}^h + (B_1^h \bar{r})_{ij}| \right)$. Легко заметить, что этот коэффициент посчитан для ожидания эндогенной переменной j , которая входит в агрегированный продукт с коэффициентом χ_j , что позволяет нам, для каждого l , следуя определению в статье [Колужнов, 2011], назвать отношение $\left(\sum_i \chi_i |b_{0ij}^h| + \rho_l^1 \sum_i \chi_i |b_{1ij}^h| + \dots + \rho_l^\tau \sum_i \chi_i |b_{\tau ij}^h| \right) / \chi_j \quad \forall j, \forall l$ и $\sum_i \chi_i \left(\rho_l^1 |b_{1ij}^h| + |b_{0ij}^h + (B_1^h \bar{r})_{ij}| \right) / \chi_j \quad \forall j, \forall l$ «собственным относительным коэффициентом ожиданий эндогенной переменной j » для соответствующих моделей. И теперь так же, как и в статье [Колужнов, 2011], по этим коэффициентам можно судить о весе, который данный тип агента имеет в экономике с точки зрения агрегированного β - коэффициента.

Для формулирования следующего шага алгоритма нам требуется расширение результата, полученного в статье [Колужнов, 2011] для «вперед смотрящей» модели без лагов, с одним «вперед смотрящим» ожиданием и с диагональной структурой процесса для шоков на все рассматриваемые классы моделей для общего случая (возможно не диагонального) процесса для шоков. По аналогии с этим результатом, и в нашем общем случае для δ -стабильности экономики должны существовать веса агрегирования эндогенных переменных и веса агентов, которые при расчете агрегированных ожиданий привязываются к значениям «собственных относительных коэффициентов ожиданий эндогенных переменных». Мы получаем эти результаты и представляем их в виде следующих утверждений.

Утверждение 12.6. Для общего (возможно не диагонального) процесса для шоков, если для каждой экономики из соответству-

ющего множества АМ I (III), полученного при агрегированном взвешивании ожиданий по строкам V , существует по крайней мере одна пара весов агрегирования (12.27) и (12.28), такая что для каждого агента «собственный относительный коэффициент ожидания эндогенной переменной» меньше, чем вес агента, используемого в расчете агрегированных ожиданий, т.е.

$$\left(\sum_i \chi_i |b_{0ij}^h| + \rho_l^1 \sum_i \chi_i |b_{lij}^h| + \dots + \rho_l^r \sum_i \chi_i |b_{rij}^h| \right) / \chi_j < \eta_h, \forall j, \forall h, \forall l,$$

причем $b_{0ij}^h \equiv 0$ для АМ III, тогда экономика, задаваемая (12.3) и (12.2) (М I) ((12.5) и (12.2) (М III)), (слабо) δ -стабильна при неоднородном RLS -обучении.

Утверждение 12.7 Для общего (возможно не диагонального) процесса для шоков, если для каждой экономики из соответствующего множества АМ II (IV), полученного при агрегированном взвешивании ожиданий по строкам V , и для каждой экономики из соответствующего множества АМ II (IV), полученного при агрегированном взвешивании ожиданий по строкам $\bar{r}$, существует по крайней мере одна пара весов агрегирования (12.27) и (12.28), такая что для каждого агента «собственный относительный коэффициент ожидания эндогенной переменной» меньше, чем вес агента, используемого в расчете агрегированных ожиданий, т.е.

$\exists(\chi, \eta)$ – веса, такие что

$$\sum_i \chi_i \left(\rho_l^1 |b_{lij}^h| + |b_{0ij}^h + (B_1^h \bar{r})_{ij}| \right) / \chi_j < \eta_h, \forall j, \forall h, \forall l,$$

где $\rho_l^1 = \sum_{m=1}^k |v_{lm}|$ и

$\exists(\chi, \eta)$ – веса, такие что

$$\sum_i \chi_i \left(\rho_l^1 |b_{lij}^h| + |b_{0ij}^h + (B_1^h \bar{r})_{ij}| \right) / \chi_j < \eta_h, \forall j, \forall h, \forall l,$$

где $\rho_l^1 = \sum_{m=1}^n |\bar{r}_{lm}|$,

причем $b_{0ij}^h \equiv 0$ для АМ IV, тогда экономика, задаваемая (12.4)

и (12.2) (Модель II) ((12.6) и (12.2) (М IV)), в которой все корни $\bar{r}$ из формулы (12.19) лежат внутри единичного круга, (слабо) δ -стабильна при неоднородном RLS -обучении.

Так же, как и в статье [Колюжнов, 2011], эти утверждения не дают простого практического правила определения того, что данная экономика стабильна при неоднородном обучении. Такое правило можно найти, сконструировав верхние границы для агрегированных экономик и β - коэффициентов, учитывая уже не только возможные различные знаки элементов b_{ij} , но также различные значения весов χ и η . Эти границы можно получить для четырех различных подмножеств множества АМ I, II, III, IV из Определения 12.2 (см. выше) в зависимости от значений весов χ и η . Это и есть четвертый шаг нашего алгоритма – применение оператора агрегирования в максимальную агрегированную экономику, задаваемую следующим определением.

Определение 12.3. Для данных весов агрегирования (12.27) и (12.28), каждая экономика из соответствующего множества экономик АМ I, II, III, IV, ограничена сверху следующей максимальной агрегированной экономикой:

для М I и II (далее АМmax I (II)):

$$\begin{aligned} x_t^{AG} &= \sum_i \chi_i x_{it} \leq x_t^{AGabs} = \sum_i \chi_i |x_{it}| \leq x_t^{AGmax} = \\ &= \sum_i \chi_i |\mu_i| + \beta_s^{\max} \hat{E}_{av|t-1}^{AGmax} x_t^{AGmax} + \left| \sum_i (\chi_i C^i) \varepsilon_t \right| + \left| \sum_i (\chi_i \xi^i) \nu_t \right| \end{aligned}$$

и (12.2),

для М III и IV далее АМmax III (IV):

$$\begin{aligned} x_t^{AG} &= \sum_i \chi_i x_{it} \leq x_t^{AGabs} = \sum_i \chi_i |x_{it}| \leq x_t^{AGmax} = \\ &= \sum_i \chi_i |\mu_i| + \beta_s^{\max} \hat{E}_{av|t-1}^{AGmax} x_t^{AGmax} + \left| \sum_i (\chi_i (CP^{-1})) \varepsilon_t \right| + \left| \sum_i (\chi_i \xi^i) \nu_t \right| \end{aligned}$$

и (12.2),

где $\beta_s^{\max}$ задан в табл. 12.2 (для М I, III) и в табл. 12.3 (для М II, IV).

Таблица 12.2

Максимальные агрегированные β - коэффициенты для АМmax I (III)

	Подмножество	Тип агрегированного взвешивания ожиданий	$\beta_s^{\max} =$ (где $b_{0ij}^h \equiv 0$ для АМmax III)
s=1	$\forall \chi, \forall \eta$	по строкам Р	$\max_l S \sum_j \max_{h,i} \left(b_{0ij}^h + \sum_{m=1}^k v_{lm}^1 \ b_{lij}^h\ + \dots + \sum_{m=1}^k v_{lm}^\tau \ b_{lij}^h\ \right)$
s=2	$\forall \chi, \eta = 1/S$	по столбцам Р	$\max_l \max_i \sum_h \sum_j \left(b_{0ij}^h + \sum_{m=1}^k v_{ml}^1 \ b_{lij}^h\ + \dots + \sum_{m=1}^k v_{ml}^\tau \ b_{lij}^h\ \right)$
s=3	$\chi = 1/n, \forall \eta$	по столбцам Р	$\max_l S \sum_i \max_{h,j} \left(b_{0ij}^h + \sum_{m=1}^k v_{ml}^1 \ b_{lij}^h\ + \dots + \sum_{m=1}^k v_{ml}^\tau \ b_{lij}^h\ \right)$
s=4	$\chi = 1/n, \eta = 1/S$	по строкам Р	$\max_l \sum_h \max_j \sum_i \left(b_{0ij}^h + \sum_{m=1}^k v_{lm}^1 \ b_{lij}^h\ + \dots + \sum_{m=1}^k v_{lm}^\tau \ b_{lij}^h\ \right) $

Максимальные агрегированные β - коэффициенты для АМmax II (IV)

	Подмножество	Тип агрегированного взвешивания ожиданий	$\beta_s^{\max} = (\text{где } b_{0ij}^h \equiv 0 \text{ для АМmax IV})$
s=1	$\forall \chi, \forall \eta$	по строкам P	$\max_l S \sum_j \max_{h,i} \left(b_{0ij}^h + (B_1^h \bar{r})_{ij} + \sum_{m=1}^k v_{lm} \bar{v}_{lm} \ b_{lij}^h\ \right)$
		по строкам $\bar{b}$	$\max_l S \sum_j \max_{h,i} \left(b_{0ij}^h + (B_1^h \bar{r})_{ij} + \sum_{m=1}^n \bar{b}_{lm} \bar{v}_{lm} \ b_{lij}^h\ \right)$
s=2	$\forall \chi, \eta = 1/S$	по столбцам P	$\max_l \max_i \sum_h \sum_j \left(b_{0ij}^h + (B_1^h \bar{r})_{ij} + \sum_{m=1}^k v_{ml} \bar{v}_{ml} \ b_{lij}^h\ \right)$
		по столбцам $\bar{b}$	$\max_l \max_i \sum_h \sum_j \left(b_{0ij}^h + (B_1^h \bar{r})_{ij} + \sum_{m=1}^n \bar{b}_{ml} \bar{v}_{ml} \ b_{lij}^h\ \right)$
s=3	$\chi = 1/n, \forall \eta$	по столбцам P	$\max_l S \sum_i \max_{h,j} \left(b_{0ij}^h + (B_1^h \bar{r})_{ij} + \sum_{m=1}^k v_{ml} \bar{v}_{ml} \ b_{lij}^h\ \right)$
		по столбцам $\bar{b}$	$\max_l S \sum_i \max_{h,j} \left(b_{0ij}^h + (B_1^h \bar{r})_{ij} + \sum_{m=1}^n \bar{b}_{ml} \bar{v}_{ml} \ b_{lij}^h\ \right)$
s=4	$\chi = 1/n, \eta = 1/S$	по строкам P	$\max_l \sum_h \sum_j \max_i \left(b_{0ij}^h + (B_1^h \bar{r})_{ij} + \sum_{m=1}^k v_{lm} \bar{v}_{lm} \ b_{lij}^h\ \right)$
		по строкам $\bar{b}$	$\max_l \sum_h \sum_j \max_i \left(b_{0ij}^h + (B_1^h \bar{r})_{ij} + \sum_{m=1}^n \bar{b}_{lm} \bar{v}_{lm} \ b_{lij}^h\ \right)$

Легко доказать, что эти максимальные агрегированные β -коэффициенты являются верхними границами соответствующих $\beta_{avl}^{AGabs}(\chi, \eta)$ для разных подмножеств экономик AM I, II, III, IV.

Таким образом, применяя наш пошаговый алгоритм, нам удалось агрегировать экономику в одномерную и найти максимальные агрегированные экономики, которые ограничивают все такие агрегированные экономики в рамках конкретных подмножеств. Следующий результат в форме двух утверждений для модели без лагов и с лагами, соответственно, подчеркивает ключевую роль E -стабильности агрегированной экономики для стабильности исходной структурно-неоднородной экономики с возможно различными степенями инерции.

Утверждение 12.8. Если хотя бы одна из максимальных агрегированных экономик (AMmax I (III)) для соответствующего множества AM I (III) E -стабильна (т. е. хотя бы один соответствующий максимальный агрегированный β -коэффициент, определенный в табл. 12.2, меньше единицы), тогда экономика, описываемая исходной M I (III), является (слабо) δ -стабильной при неоднородном RLS обучении и общем (возможно не диагональном) процессе поведения шоков.

Утверждение 2.9. Если хотя бы одна из максимальных агрегированных экономик (AMmax II (IV)) каждого типа (V -типа и $\bar{r}$ -типа) для соответствующего множества AM II (IV) E -стабильна (т. е. хотя бы один соответствующий максимальный агрегированный β -коэффициент каждого типа, определенный в табл. 12.3, меньше единицы), тогда экономика, описываемая исходной M II (IV), в которой все корни $\bar{r}$ из формулы (12.19) лежат внутри единичного круга, является (слабо) δ -стабильной при неоднородном RLS обучении и общем (возможно не диагональном) процессе поведения шоков.

В случае диагонального процесса поведения шоков, задаваемого (12.16), возможно получить более слабые условия δ -стабильности при неоднородном RLS обучении для M II, IV и при неоднородном смешанном RLS/SG обучении для M I, III. Подробности и результаты см. в [Богомолова, Колужнов, 2020].

12.4. Альтернативные условия стабильности экономической динамики при неоднородном адаптивном обучении¹

В этом разделе мы применяем подход, основанный на альтернативном определении D_b -стабильности, суть которого состоит в том, что задача поиска условий D -стабильности якобианов вида $\Delta \cdot \Phi$ может быть заменена задачей поиска условий стабильности Φ и проверки того, что $i = \sqrt{-1}$ не является собственным значением некоторой специально построенной матрицы. Более того, матрица Δ во всех рассмотренных моделях является не только положительной диагональной матрицей, но ее диагональ еще и состоит из равноразмерных блоков одинаковых чисел. Это позволило [Колужнов, 2011] ввести определение блочной D -стабильности (D_b -стабильности) и дать ей альтернативное определение, для удобства приводимые здесь.

Определение 12.4. Матрица A размера $nS \times nS$ является D_b -стабильной, если $D_b A$ стабильна для любой положительной блочно-диагональной матрицы $D_b = \text{diag}(\delta_1, \dots, \delta_1, \dots, \delta_S, \dots, \delta_S)$.

Утверждение 12.A. (Альтернативное определение D_b -стабильности). Рассмотрим $M_{nS}(C)$, множество всех комплексных $nS \times nS$ матриц, и D_{bns} , множество всех $nS \times nS$ блочно-диагональных матриц с положительными диагональными элементами. Возьмем A из $M_{nS}(C)$ и предположим, что существует V из D_{bns} , такая что VA стабильна. Тогда A является D_b -стабильной тогда и только тогда, когда $A \pm D_b$ невырождена для всех D_b из D_{bns} . Если $A \in M_{nS}(R)$ – множеству всех действительных $nS \times nS$ матриц, тогда « $\pm$ » в приведенном выше условии можно заменить на « $+$ », поскольку для действительных матриц для любого комплексно-собственного числа всегда есть сопряженное.

¹ Результаты этого раздела были отражены в статье [Богомолова, Колужнов, 2025]. Строгие доказательства приводимых здесь утверждений можно посмотреть в данной статье.

Взяв в приведенном выше утверждении вместо V единичную матрицу и в качестве $D_b = \text{diag}(1/\delta_1, \dots, 1/\delta_1, \dots, 1/\delta_S, \dots, 1/\delta_S)$, $\delta_h > 0$, $h = \overline{1, S}$, мы получаем альтернативный (по отношению к Критериям 12.1 и 12.2) критерий (сильной) δ -стабильности для всех четырех классов рассматриваемых моделей для общего случая (возможно недиагональной) структуры процесса шоков.

Критерий 12.10. В экономиках (12.3) и (12.2) (М I) и (12.5) и (12.2) (М III) или в экономиках (12.4) и (12.2) (М II) и (12.6) и (12.2) (М IV), у которых все корни решения $MSV\ REE\ \bar{r}$, определяемого в (12.19), лежат внутри единичного круга, смешанное неоднородное RLS/SG обучение глобально сходится (почти наверное) к $MSV\ REE$ тогда и только тогда, когда соответствующая матрица Φ_{LF} , определенная в (12.18), стабильна и

$$\det \left[\left(\sum_{h=1}^{S_0} \left(\frac{1}{I + \frac{1}{\delta_h^2} I} (-F_h) \right) + \sum_{h=S_0+1}^S \left(\frac{L}{L + \frac{1}{\delta_h^2} I} (-F_h) \right) + I \right) + i \left(\sum_{h=1}^{S_0} \left(\frac{(\delta_h)^{-1}}{I + \frac{1}{\delta_h^2} I} (-F_h) \right) + \sum_{h=S_0+1}^S \left(\frac{(\delta_h)^{-1} L}{L + \frac{1}{\delta_h^2} I} (-F_h) \right) \right) \right] \neq 0$$

$$\forall \delta_h > 0, h = \overline{1, S}, \forall S_0 = \overline{1, S}.$$

Далее, используя альтернативное определение D_b -стабильности, мы получаем альтернативный (по отношению к Критерию 12.4 в терминах матриц Якоби (см. табл. (12.1)) критерий (сильной) δ -стабильности для моделей без лагов (М I и III) при смешанном неоднородном RLS/SG обучении для случая диагональной структуры процесса шоков.

Утверждение 12.11. В экономиках (12.3) и (12.1) (М I) и (12.5) и (12.1) (М III) смешанное неоднородное RLS/SG обучение глобально сходится (почти наверное) к $MSV\ REE$ для любых степеней инерции агентов, $\delta > 0$, тогда и только тогда, когда соответствующая матрица Φ_{ρ_l} , определенная в (12.25), стабильна и

$$\det \left[\left(\sum_{h=1}^S \left(\frac{-1}{1 + \frac{1}{\delta_h^2}} (B_0^h + \rho_l B_1^h + \dots + \rho_l^{\tau} B_{\tau}^h) + I \right) + i \left(\sum_{h=1}^S \frac{-(\delta_h)^{-1}}{1 + \frac{1}{\delta_h^2}} (B_0^h + \rho_l B_1^h + \dots + \rho_l^{\tau} B_{\tau}^h) \right) \right) \right] \neq 0$$

$$\forall \delta_h > 0, h = \overline{1, S}, \forall l = \overline{0, k}, (\rho_0 = 1).$$

Для одномерного случая ($n=1$) это условие упрощается до условия: Φ_{ρ_l} – стабильна и

$$\left(\sum_{h=1}^S \frac{-1}{1 + \frac{1}{\delta_h^2}} (B_0^h + \rho_l B_1^h + \dots + \rho_l^\tau B_\tau^h) + 1 \right) \neq 0 \text{ или}$$

$$\left(\sum_{h=1}^S \frac{-(\delta_h)^{-1}}{1 + \frac{1}{\delta_h^2}} (B_0^h + \rho_l B_1^h + \dots + \rho_l^\tau B_\tau^h) \right) \neq 0,$$

или оба условия выполняются одновременно, $\forall \delta_h > 0, h = \overline{1, S}$,
 $\forall l = \overline{0, k}, (\rho_0 = 1)$, причем $B_0^h \equiv 0$ для М III.

Используя этот подход, мы также получаем альтернативные (по отношению к достаточным условиям (слабой) δ -стабильности из Следствия 12.3 (см. (табл. 12.1)) в терминах матриц Якоби) достаточные условия (слабой) δ -стабильности для моделей с лагами эндогенной переменной (М II и IV) при неоднородном *RLS* обучении для общего случая (возможно недиагональной) структуры процесса шоков.

Утверждение 12.12. В экономиках (12.4) и (12.2) (М II) и (12.6) и (12.2) (М IV), у которых все корни решения *MSV REE* $\bar{r}$, определяемого в (12.19), лежат внутри единичного круга, неоднородное *RLS* обучение глобально сходится (почти наверное) к *MSV REE* для любых степеней инерции агентов, $\delta > 0$, если соответствующие матрицы Φ , Φ_b и Φ_v , определенные в (12.22), (12.24) и (12.23), соответственно, стабильны и

$$\det \left[\sum_{h=1}^S \left(\frac{-1}{1 + (\delta_h^2)^{-1}} (B_0^h + B_1^h + B_1^h \bar{r}) + I \right) + i \left(\sum_{h=1}^S \frac{-1}{\delta_h} \frac{1}{1 + \frac{1}{\delta_h^2}} (B_0^h + B_1^h + B_1^h \bar{r}) \right) \right] \neq 0,$$

$\forall \delta_h > 0, h = \overline{1, S}$, и

$$\det \left[\sum_{h=1}^S \left(\frac{-1}{1 + \frac{1}{\delta_h^2}} (\bar{r}' \otimes B_1^h + I_n \otimes (B_0^h + B_1^h \bar{r})) + I \right) + i \left(\sum_{h=1}^S \frac{-\frac{1}{\delta_h}}{1 + \frac{1}{\delta_h^2}} (\bar{r}' \otimes B_1^h + I_n \otimes (B_0^h + B_1^h \bar{r})) \right) \right] \neq 0,$$

$\forall \delta_h > 0, h = \overline{1, S},$ и

$$\det \left[\sum_{h=1}^S \left(\frac{-1}{1 + \frac{1}{\delta_h^2}} (V' \otimes B_1^h + I_k \otimes (B_0^h + B_1^h \bar{r})) + I \right) + i \left(\sum_{h=1}^S \frac{-\frac{1}{\delta_h}}{1 + \frac{1}{\delta_h^2}} (V' \otimes B_1^h + I_k \otimes (B_0^h + B_1^h \bar{r})) \right) \right] \neq 0$$

$\forall \delta_h > 0, h = \overline{1, S},$ причем $B_0^h \equiv 0$ для М IV.

Для случая диагональной структуры процесса шоков (12.16) возможно еще большее упрощение записанных выше достаточных условий. Этот полученный нами результат представляет собой альтернативные (по отношению к достаточным условиям (слабой) δ -стабильности из Утверждения 12.5 (см. табл. 12.1) в терминах матриц Якоби) достаточные условия (слабой) δ -стабильности для моделей с лагами эндогенной переменной (М II и IV) при неоднородном *RLS* обучении для случая диагональной структуры процесса шоков.

Утверждение 12.13. В экономиках (12.4) и (12.6) (М II) и (12.6) и (12.16) (М IV), у которых все корни решения *MSV REE* $\bar{r}$, определяемого в (12.19), лежат внутри единичного круга, неоднородное *RLS* обучение глобально сходится (почти наверное) к *MSV REE* для любых степеней инерции агентов, $\delta > 0$, если соответствующие матрицы $\tilde{\Phi}_{\rho_l}$ и Φ_b , определенные в (12.26) и (12.24), стабильны и

$$\det \left[\sum_{h=1}^S \left(\frac{-1}{1 + \frac{1}{\delta_h^2}} (B_0^h + \rho_l B_1^h + B_1^h \bar{r}) + I \right) + i \left(\sum_{h=1}^S \frac{-\frac{1}{\delta_h}}{1 + \frac{1}{\delta_h^2}} (B_0^h + \rho_l B_1^h + B_1^h \bar{r}) \right) \right] \neq 0,$$

$\forall \delta_h > 0, h = \overline{1, S}, \forall l = \overline{0, k}, (\rho_0 = 1),$ и

$$\det \left[\sum_{h=1}^S \left(\frac{-1}{1 + \frac{1}{\delta_h^2}} (\bar{r}' \otimes B_1^h + I_n \otimes (B_0^h + B_1^h \bar{r})) + I \right) + i \left(\sum_{h=1}^S \frac{-\frac{1}{\delta_h}}{1 + \frac{1}{\delta_h^2}} (\bar{r}' \otimes B_1^h + I_n \otimes (B_0^h + B_1^h \bar{r})) \right) \right] \neq 0,$$

$\forall \delta_h > 0, h = \overline{1, S}$

Для одномерного случая ($n=1$) это условие упрощается до условия: $\tilde{\Phi}_{\rho_l}$ и Φ_b – стабильны и

$$\left(\sum_{h=1}^S \frac{-1}{1 + (\delta_h^2)^{-1}} (B_0^h + \rho_l B_1^h + B_1^h \bar{r}) + 1 \right) \neq 0 \text{ или}$$

$$\left(\sum_{h=1}^S \frac{-(\delta_h)^{-1}}{1 + (\delta_h^2)^{-1}} (B_0^h + \rho_l B_1^h + B_1^h \bar{r}) \right) \neq 0,$$

или оба условия выполняются одновременно, $\forall \delta_h > 0, h = \overline{1, S}$,
 $\forall l = \overline{0, k}, (\rho_0 = 1)$, и

$$\left(\sum_{h=1}^S \frac{-1}{1 + (\delta_h^2)^{-1}} (B_0^h + 2B_1^h \bar{r}) + 1 \right) \neq 0 \text{ или}$$

$$\left(\sum_{h=1}^S \frac{-(\delta_h)^{-1}}{1 + (\delta_h^2)^{-1}} (B_0^h + 2B_1^h \bar{r}) \right) \neq 0$$

или оба условия выполняются одновременно, $\forall \delta_h > 0, h = \overline{1, S}$,
 причем $B_0^h \equiv 0$ для М IV.

Также подход, основанный на альтернативном определении D_b -стабильности, позволяет нам получить достаточные условия «одинакового знака», рассмотренные [Honkapohja, Mitra, 2006] для случаев с малой размерностью эндогенной переменной $n=1, 2$, и необходимые и достаточные условия (критерий) δ -стабильности для $n=1$ в терминах только структурной однородности, независимо от неоднородности при обучении.

Перед тем как сформулировать этот критерий, заметим, что условия сходимости к $MSV\ REE$ при смешанном неоднородном RLS/SG обучении М I и III в случае диагональной структуры процесса шоков эквивалентны условиям сходимости к $MSV\ REE$ (такому же, как и в исходных моделях) соответствующих моделей из множества ассоциированных «безлаговых» моделей с ожиданием текущего значения с $(t-1)$ – датировкой ожиданий.

Определение 12.5. Множество ассоциированных «безлаговых» моделей с ожиданием текущего значения эндогенной переменной с $t-1$ – датировкой ожиданий, соответствующее М I (III)

(т. е. множество моделей, которое имеет такое же асимптотическое поведение, как и М I (III)), записывается как (12.16) и

$$\text{для М I: } x_t = \mu + \sum_{h=1}^S (B_0^h + \rho_l B_1^h + \dots + \rho_l^\tau B_\tau^h) \hat{E}_{t-1}^h x_t + C z_t + \xi v_t, \\ \forall l = 0, 1, \dots, k, (\rho_0 = 1),$$

$$\text{для М III: } x_t = \mu + \sum_{h=1}^S (\rho_l B_1^h + \dots + \rho_l^\tau B_\tau^h) \hat{E}_{t-1}^h x_t + C P^{-1} z_t + \xi v_t, \\ \forall l = 0, 1, \dots, k, (\rho_0 = 1).$$

Следующий критерий сформулирован в терминах экономик и подэкономик этого множества моделей.

Утверждение 12.14 (Критерий (сильной) δ -стабильности для одномерных моделей без лагов (М I и III) при смешанном неоднородном RLS/SG обучении в случае диагональной структуры процесса шоков). В случае $n=1$, экономика, задаваемая (12.3) и (12.16) (М I ((12.5) и (12.16), М III), δ -стабильна при смешанном неоднородном RLS/SG обучении тогда и только тогда, когда каждая экономика из множества ассоциированных «безлаговых» моделей с ожиданием текущего значения эндогенной переменной с $t-1$ – датировкой ожиданий, соответствующего М I (III), E -стабильна (т. е. соответствующая матрица Φ_{ρ_l} , определенная в (12.25), стабильна) и верно по крайней мере одно из следующих условий: условие «одинакового» знака (все $(B_0^h + \rho_l B_1^h + \dots + \rho_l^\tau B_\tau^h)$ больше либо равны нулю и хотя бы один из них строго больше нуля, или все $(B_0^h + \rho_l B_1^h + \dots + \rho_l^\tau B_\tau^h)$ меньше либо равны нулю и хотя бы один из них строго меньше нуля); или все средние экономики с $(B_0^h + \rho_l B_1^h + \dots + \rho_l^\tau B_\tau^h)_{(h_1, \dots, h_p)} = \sum_{(h_1, \dots, h_p)} (B_0^h + \rho_l B_1^h + \dots + \rho_l^\tau B_\tau^h)$, соответствующие подэкономикам¹ $(h_1, \dots, h_p)$ всех размеров p не являются E -нестабильными и для каждого $l = 0, 1, \dots, k, (\rho_0 = 1)$ существует хотя бы одна средняя экономика, соответствующая подэкономике $(h_1^*(l), \dots, h_p^*(l))$ для каждого размера p , для которой ко-

¹ Подэкономика $(h_1, \dots, h_p)$ размера p есть экономика, состоящая только из части агентов исходной экономики.

коэффициент $\sum_{(h_1^*(l), \dots, h_p^*(l))} (B_0^h + \rho_l B_1^h + \dots + \rho_l^\tau B_\tau^h)$, отвечающий за стабильность, строго меньше единицы. Причем $B_0^h \equiv 0$ для М III.

По аналогии с предыдущим выводом, мы также получаем достаточно слабые, экономически содержательные, достаточные условия (слабой) δ -стабильности для одномерных моделей с лагом эндогенной переменной (М II и IV) при неоднородном *RLS* работе [Богомолова, Колужнов, 2025].

Также, из Утверждения 12.11 (выше) мы получаем достаточные условия (сильной) δ -стабильности для двумерной экономики при смешанном неоднородном *RLS/SG* обучении в случае диагональной структуры процесса шоков в терминах структурной неоднородности, независимо от неоднородности при обучении.

Утверждение 12.15. В случае $n=2$, экономика, задаваемая (12.3), и (12.16) (М I) ((12.5) и (12.16), М III), (сильно) δ -стабильна при смешанном неоднородном *RLS/SG* обучении, если каждая экономика из множества ассоциированных «безлаговых» моделей с ожиданием текущего значения эндогенной переменной с $t-1$ – датировкой ожиданий, соответствующего М I (III), *E*-стабильна (т. е. соответствующая матрица Φ_{ρ_l} , определенная в (12.25), стабильна) и для каждой из этих экономик выполняется следующее условие «одинакового знака» $\forall l = 0, 1, \dots, k, (\rho_0 = 1)$:

$$\left\{ \begin{aligned} &\det(-\rho_l(B_0^i + \rho_l B_1^i + \dots + \rho_l^\tau B_\tau^i)) \geq 0, \\ &[\det \text{mix}(-\rho_l(B_0^i + \rho_l B_1^i + \dots + \rho_l^\tau B_\tau^i), -\rho_l(B_0^j + \rho_l B_1^j + \dots + \rho_l^\tau B_\tau^j)) + \\ &+ \det \text{mix}(-\rho_l(B_0^j + \rho_l B_1^j + \dots + \rho_l^\tau B_\tau^j), -\rho_l(B_0^i + \rho_l B_1^i + \dots + \rho_l^\tau B_\tau^i))] \geq 0, \\ &i \neq j \\ &M_1(-\rho_l(B_0^j + \rho_l B_1^j + \dots + \rho_l^\tau B_\tau^j)) \geq 0 \end{aligned} \right\}$$

или выполняются приведенные выше условия, но с обратным знаком, где $\text{mix}(-\rho_l B^i, -\rho_l B^j)$ обозначает матрицу структурных параметров попарно-смешанной экономики, составленную из столбцов пары матриц $-\rho_l B^i$, $-\rho_l B^j$, $\forall i, j = 1, \dots, S$. Причем $B_0^h \equiv 0$ для М III.

12.5. Стабильность экономической динамики в моделях с неоднородным адаптивным обучением при различных правилах денежно-кредитной политики¹

Основой для построения всех современных *DSGE*-моделей монетарной политики, в том числе *DSGE*-моделей и полуструктурной модели ЦБ РФ, является базовая новокейнсианская (*NK*) *DSGE*-модель монетарного трансмиссионного механизма. Она до сих пор является основой для усовершенствования моделирования и построения различных поведенческих новокейнсианских моделей. На базовой *NK* модели обкатывались и обкатываются условия сходимости при различных правилах монетарной политики, которые затем применяются для более подробно структурно прописанных моделей экономик конкретных стран.

Структурная форма (*SF*) базовой *NK* модели с технологическим шоком $a_t = \rho_a a_{t-1} + \varepsilon_t^a$, где $\rho_a \in [0,1)$ задается следующими уравнениями:

$$\pi_t = \beta E_t \pi_{t+1} + \kappa \tilde{y}_t \quad (12.29)$$

– новокейнсианской кривой Филлипса, где π_t – уровень инфляции, $\tilde{y}_t = y_t - y_t^n$ разрыв выпуска – отклонение равновесного выпуска в модели с негибкими ценами от равновесного выпуска при гибких ценах y_t^n , $0 < \beta < 1$ – коэффициент дисконтирования периодной функции полезности, $\kappa > 0$, $y_t^n = \psi_{ya}^n a_t + v_y^n$, $\psi_{ya}^n = \psi_{ya} = (1 + \varphi) / (\sigma(1 - \alpha) + \varphi + \alpha)$, $v_y^n = -(1 - \alpha)(\gamma - \ln(1 - \alpha)) / (\sigma(1 - \alpha) + \varphi + \alpha)$, γ – желаемый уровень надбавки к предельным издержкам при гибких ценах, σ, φ – параметры эластичности периодной функции полезности $u(c_t, l_t) = c_t^{1-\sigma} / (1 - \sigma) - l_t^{1+\varphi} / (1 + \varphi)$, $(1 - \alpha)$ – эластичность по

¹ Часть результатов этого раздела была отражена в статье [Богомолова, Колужнов, 2011]. Строгие доказательства приводимых здесь утверждений можно посмотреть в статье.

туду производственной функции $y_t = A_t l_t^{1-\alpha}$, $a_t = \ln(A_t)$ – технологический шок, и

$$\tilde{y}_t = E_t \tilde{y}_{t+1} - \sigma^{-1} (i_t - E_t \pi_{t+1} - r_t^{en}) \quad (12.30)$$

– динамической линией IS , где r_t^{en} – есть равновесный уровень подразумеваемой (ожидаемой, *ex ante*) реальной процентной ставки при гибких ценах

$$r_t^{en} = \rho + \sigma E_t (\Delta y_{t+1}) = \rho + \sigma \psi_{ya} E_t (\Delta a_{t+1}), \quad \rho = \ln(\beta).$$

Для включения неоднородности в модель, мы предполагаем, что есть S типов частных агентов, характеризуемых долей $\omega_h > 0$ в экономике, $\sum \omega_h = 1$. Таким образом, $E_t \pi_{t+1} = \sum \omega_h E_t^h \pi_{t+1}$, $E_t \tilde{y}_{t+1} = \sum \omega_h E_t^h \tilde{y}_{t+1}$, где $E_t^h \tilde{y}_{t+1}$ и $E_t^h \pi_{t+1}$ – ожидания (в общем случае, нерациональные), сформированные в момент времени t , частного агента типа h о разрыве выпуска и инфляции следующего периода, соответственно.

Модель (12.29) и (12.30) является общей формулировкой моделей, выводимых на основе микроэкономических задач, рассматриваемых в литературе по монетарной экономике. Два основных уравнения NK модели, кривая Филлипса и линия IS , получаются из задач оптимизации репрезентативного домохозяйства и репрезентативной монополистически конкурентной фирмы при предположении о ценообразовании по Кальво [Calvo, 1983].

Предполагается, что при решении своих оптимизационных задач частные агенты берут процентную ставку (входящую в уравнение линии IS) как заданную. Процентная ставка, в свою очередь, устанавливается регулятором – ЦБ. Во многих исследованиях вопросов монетарной политики обычно предполагается, что регулятор для установления процентной ставки использует некоторое линейное правило, зависящее от состояния экономики.

Подставляя правило для процентной ставки в уравнение линии IS , мы получаем сокращенную форму модели. Используя те же самые NK уравнения, мы можем для разных правил монетарной политики получить различные сокращенные формы, которые имеют общий вид двумерной системы со стационарным $AR(1)$

процессом наблюдаемых шоков. Типичный представитель такой двумерной системы с текущими ожиданиями выглядит так:

$$\begin{bmatrix} \tilde{y}_t \\ \pi_t \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} E_t \tilde{y}_{t+1} \\ E_t \pi_{t+1} \end{bmatrix} + B(r_t^{en} - \rho - v_t), \quad (12.31)$$

где V_t – шок монетарной политики, $v_t = \rho_v v_{t-1} + \varepsilon_t^v$, $\rho_v \in [0,1)$.

Некоторые специфичные необходимые условия и достаточные условия δ -стабильности для структурно однородного случая также возможно получить и в терминах значений собственных чисел матрицы структурных параметров сокращенной формы, A . Это возможно сделать путем применения подхода, основанного на анализе характеристического уравнения.

Утверждение 12.16. Если все собственные числа A удовлетворяют условию $\|\lambda_i\|^2 / \text{Re } \lambda_i < 1$ (отношение квадрата модуля к действительной части каждого собственного числа меньше единицы) для комплексных корней и собственное число меньше 1 для действительных собственных чисел, тогда структурно однородная система (12.31) любой размерности n с диагональной структурой процесса шоков δ -стабильна. Для того чтобы структурно однородная система (12.31) любой размерности n с диагональной структурой процесса шоков была δ -стабильной, необходимо, чтобы все действительные корни матрицы A были меньше единицы. Это условие дает тест на отсутствие δ -стабильности.

Замечание. Условия стабильности для структурно однородных моделей всех типов I, II, III, IV получаются через сведение условий стабильности других типов моделей к стабильности ассоциированной модели.

Также рассмотрим для примера работу полученных условий стабильности при неоднородном адаптивном обучении по определению приемлемых параметров монетарной политики в правилах Тейлора. До этого такие условия были получены только при однородном адаптивном обучении (см. [Bullard, Mitra, 2002]), где была показана необходимость придерживаться так называемого принципа Тейлора: реальная ставка процента в долгосрочном плане при растущей инфляции должна расти,

что эквивалентно условию, что в долгосрочном плане номинальная ставка процента должна изменяться больше чем 1 к 1 в ответ на изменения в инфляции. Это же условие оказалось необходимым (а в отдельных постановках и достаточным) для единственности равновесия при рациональных ожиданиях, к которому сходится модель при адаптивном обучении. Для нашей постановки условия единственности *REE* остаются теми же самыми, что и в указанной выше работе, поскольку соответствующие структурные формы модели сохраняются, а достаточные условия сходимости при неоднородном обучении немного жестче, чем при однородном обучении.

Мы проверили работу полученных нами условий для конкретных параметризаций модели, рассмотренных в статье [Clarida et al., 1999] ($\beta = 0.99$, $\sigma = 1$, $\kappa = 0.3$) и [Woodford, 1999] ($\beta = 0.99$, $\sigma = 0.157$, $\kappa = 0.024$). Эти же параметризации рассмотрены в работе [Bullard, Mitra, 2002]. В обоих случаях мы использовали $\rho_a = 0.35$ и $\rho_v = 0.5$, как предложено в работе [Galí, 2008].

При применении правила Тейлора, основанного на текущих данных по инфляции и разрыву выпуска $i_t = \rho + \varphi_\pi \pi_t + \varphi_y \tilde{y}_t + v_t$, $\varphi_\pi, \varphi_y \geq 0$, где v_t – шок монетарной политики, $v_t = \rho_v v_{t-1} + \varepsilon_t^v$, $\rho_v \in [0, 1)$, сокращенная форма модели имеет вид:

$$\begin{bmatrix} \tilde{y}_t \\ \pi_t \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} E_t \tilde{y}_{t+1} \\ E_t \pi_{t+1} \end{bmatrix} + B(r_t^{en} - \rho - v_t),$$

$$\text{где } A = \begin{bmatrix} \sigma & 1 - \varphi_\pi \beta \\ \sigma \kappa & \kappa + \beta(\sigma + \varphi_y) \end{bmatrix},$$

и согласно утверждению 12.16 для δ -стабильности достаточно, чтобы отношение квадрата модуля к действительной части собственного числа A было меньше единицы для всех комплексных корней и собственное число было меньше 1 для действительных собственных чисел. Соответственно графики областей, для которых выполняются достаточные условия стабильности, выглядят следующим образом – для параметризации [Clarida, et al., 1999] и для параметризации [Woodford, 1999] (рис. 12.1).

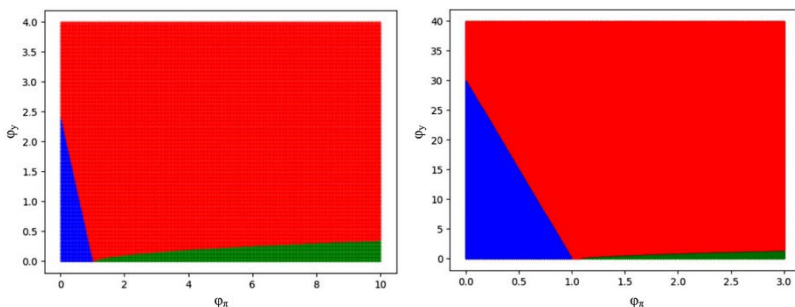


Рис. 12.1. Области параметров монетарной политики, удовлетворяющие достаточному условию δ -стабильности при применении правила Тейлора, основанного на текущих данных, для базовой параметризации [Woodford, 1999] (слева) и [Clarida et al., 1999] (справа)

Красная и зеленая области (см. рис. 12.1) для обеих параметризаций содержат параметры политики, удовлетворяющие достаточному условию δ -стабильности Утверждения 12.16 при действительных и комплексных собственных числах, соответственно. Синяя область содержит параметры политики, не удовлетворяющие достаточному δ -условию стабильности при действительных собственных числах. При данной параметризации при применении данного правила нет комплексных собственных чисел, не удовлетворяющих условию δ -стабильности Утверждения 12.16. Граница между синей и красной областями определяется принципом Тейлора $\kappa(\varphi_\pi - 1) + (1 - \beta)\varphi_y > 0$.

При применении правила Тейлора, основанного на текущих ожиданиях по инфляции и разрыву выпуска $i_t = \rho + \varphi_\pi E_{t-1}\pi_t + \varphi_y E_{t-1}\tilde{y}_t + \nu_t$, $\varphi_\pi, \varphi_y \geq 0$, сокращенная форма модели принимает вид:

$$\begin{bmatrix} \tilde{y}_t \\ \pi_t \end{bmatrix} = A_0 \begin{bmatrix} E_{t-1}\tilde{y}_t \\ E_{t-1}\pi_t \end{bmatrix} + A_1 \begin{bmatrix} E_t\tilde{y}_{t+1} \\ E_t\pi_{t+1} \end{bmatrix} + B(r_t^{en} - \rho - \nu_t),$$

$$\text{где } A_0 = \begin{bmatrix} -\varphi_x/\sigma & -\varphi_\pi/\sigma \\ -\kappa\varphi_x/\sigma & -\kappa\varphi_\pi/\sigma \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1/\sigma \\ \kappa & \beta + \kappa/\sigma \end{bmatrix},$$

и согласно утверждению 12.16 и замечанию к нему для δ -стабильности достаточно, чтобы отношение квадрата модуля к действительной части собственного числа матриц $\tilde{A}_l = A_0 + \rho_l A_1$ для $\rho_0 = 1$, $\rho_1 = \rho_a$, $\rho_2 = \rho_v$ было меньше единицы для всех комплексных корней и собственное число было меньше 1 для действительных собственных чисел. Соответственно, графики областей, для которых выполняются достаточные условия стабильности выглядят для параметризаций в [Clarida, et al., 1999] и [Woodford, 1999] следующим образом (рис. 12.2).

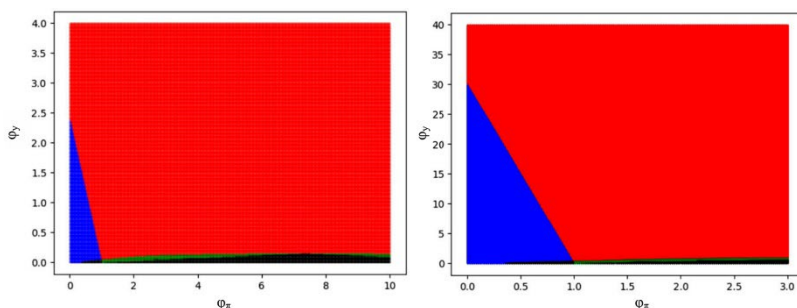


Рис. 12.2. Области параметров монетарной политики, удовлетворяющие достаточному условию стабильности при применении правила Тейлора, основанного на текущих ожиданиях, для базовой параметризации [Woodford, 1999] (слева) и [Clarida et al., 1999] (справа)

Красная и зеленая области (см. рис. 12.2) для обеих параметризаций содержат параметры политики, удовлетворяющие достаточному условию δ -стабильности Утверждения 12.16 при действительных и комплексных собственных числах, соответственно. Синяя область содержит параметры политики, не удовлетворяющие достаточному δ -условию стабильности при действительных собственных числах. Черная область содержит параметры политики, не удовлетворяющие достаточному δ -условию стабильности при комплексных собственных числах. Граница между синей и красной областями определяется принципом Тейлора $\kappa(\phi_\pi - 1) + (1 - \beta)\phi_y > 0$.

Проводя аналогичную процедуру для правила Тейлора, основанного на «вперед смотрящих» ожиданиях по инфляции и разрыву выпуска, $i_t = \rho + \varphi_\pi E_t \pi_{t+1} + \varphi_y E_t \tilde{y}_{t+1} + v_t$, $\varphi_\pi, \varphi_y \geq 0$, где v_t – шок монетарной политики, определенный выше, мы приходим к похожим результатам, что и с правилом Тейлора, основанном на текущих ожиданиях.

Оказалось, что область параметров политики для δ -стабильности модели при рассмотренных правилах Тейлора при неоднородном обучении практически совпадает с областью, полученной в исследовании [Bullard, Mitra, 2002] за исключением очень малой области параметров (с малым коэффициентом реакции на изменение разрыва выпуска), в которой собственные числа из Утверждения 12.16 – комплексные и не удовлетворяют достаточному условию. Мы высказываем предостережение по поводу использования правил с малым коэффициентом для реакции на изменение разрыва выпуска при определенном (рабочем) диапазоне коэффициентов реакции на изменение в инфляции при правилах Тейлора, основанных на текущих и «вперед смотрящих» ожиданиях. В целом, за исключением обсуждаемых выше сочетаний коэффициентов реакции в правилах Тейлора, можно смело утверждать, что принцип Тейлора работает и в случае неоднородного адаптивного обучения.

Мы также расширяем анализ оптимальных правил монетарной политики применительно к стабильности экономики, начатый работой [Evans, Honkapohja, 2003], до случая неоднородного обучения частных агентов. Мы тестируем правила монетарной политики в общей постановке базовой неокейнсианской *DSGE*-модели при помощи условий стабильности, полученных в предыдущих разделах. Как оказалось, результаты, полученные в исследовании [Evans, Honkapohja, 2003] для случая однородного обучения, реплицируются для случая невыполнения гипотезы репрезентативного агента.

Мы рассматриваем общую *NK* модель с наблюдаемыми стационарными *AR*(1) шоками – она является расширенной версией базовой *NK* модели. Структурная форма модели выглядит следующим образом:

$$y_t = c_1 - \varphi(i_t - \hat{E}_t \pi_{t+1}) + \hat{E}_t y_{t+1} + \chi'_1 z_t \quad (12.32)$$

$$\pi_t = c_2 + \lambda y_t + \beta \hat{E}_t \pi_{t+1} + \chi'_2 z_t, \quad (12.33)$$

где первое уравнение задает линию IS , а второе уравнение задает кривую Филлипса, $z_t = [z_{1t} \dots z_{kt}]'$ есть вектор наблюдаемых $AR(1)$ шоков,

$$z_{it} = \rho_i z_{i,t-1} + \varepsilon_{it}, \quad |\rho_i| < 1, \quad \varepsilon_{it} \text{ н.о.р.с.в. } (0, \sigma_i^2), \\ i = 1, \dots, k. \quad (12.34)$$

Подставляя правило для процентной ставки в уравнение линии IS , мы получаем сокращенную форму модели: (12.34) и

$$x_t = \alpha + A \hat{E}_t x_{t+1} + B z_t, \quad \text{где } x_t = [\pi_t \dots y_t]'. \quad (12.35)$$

Уточнив условия стабильности, полученные выше, для структурно-однородной модели, мы исследуем общую NK модель (12.32), (12.33) и (12.34) на стабильность при неоднородном обучении в случае применения оптимальных правил монетарной политики.

Предполагается, что экономические власти решают задачу минимизации функции потерь, которая возникает из подхода гибкого целенаправленного регулирования инфляции (режима монетарной политики, которого придерживались некоторые страны в 1990-х годах), Функция потерь экономических властей на бесконечном горизонте планирования в подходе гибкого целенаправленного регулирования выглядит следующим образом:

$(1/2)E_t \sum_{i=1}^{\infty} \beta^i [\alpha(y_{t+i} - y^*)^2 + (\pi_{t+i} - \pi^*)^2]$, где y^* и π^* есть соответствующие целевые показатели отклонения выпуска и темпа инфляции, $0 < \beta < 1$ – коэффициент дисконтирования, $\alpha > 0$ – коэффициент, показывающий, насколько более значимо для экономических властей отклонение от цели значения одного показателя по сравнению с отклонением другого, E_t – есть условное ожидание в момент времени t , а коэффициент $1/2$ взят для удобства получения условий первого порядка. Исходя из наблюдаемого на практике, мы предполагаем дискреционную политику регулятора, и задача минимизации функции потерь упрощается до решения каждый период следующей задачи:

$$\min(1/2)[\alpha(y_t - y^*)^2 + (\pi_t - \pi^*)^2] + R_t \quad (12.36)$$

на ограничении $\pi_t = c_2 + \lambda y_t + F_t$ (ЦБ берет остаточные члены функции потерь, R_t , и ограничения (соответствующего кривой Филлипса) $F_t = \beta \hat{E}_t \pi_{t+1} + \chi'_2 z_t$ как данные.)

Согласно работе [Evans, Nonkarohja, 2003], оптимальное, основанное на ожиданиях экономических агентов (*ЕВ*) правило политики, подразумевает, что ЦБ реагирует на (возможно нерациональные) ожидания частных агентов, при предположении, что эти ожидания наблюдаемы (или могут быть оценены). Его общий вид – это $i_t = \delta_0 + \delta_\pi \hat{E}_t \pi_{t+1} + \delta_y \hat{E}_t y_{t+1} + \delta'_z z_t$. Коэффициенты этого правила получаются решением условий равновесия: структурных уравнений при нерациональных ожиданиях частных агентов (12.32) и (12.33) и условий первого порядка (FOC) оптимизационной задачи ЦБ (12.36).

Подставив это правило политики в уравнение линии *IS*, мы получим следующую сокращенную форму.

$$\begin{aligned} x_t &= c^E + A^E \hat{E}_t x_{t+1} + \chi^E z_t, \text{ где } x_t = [\pi_t \dots y_t]', \\ z_t &= Fz_{t-1} + \varepsilon_t, \quad F = \text{diag}(\rho_i), \quad |\rho_i| < 1, \quad \varepsilon_{it} \text{ н.о.р.с.в. } (0, \sigma_i^2), \\ i &= \overline{1, k}, \end{aligned}$$

$$A^E = [\beta\alpha(\lambda^2 + \alpha)^{-1} \dots 0; -\beta\lambda(\lambda^2 + \alpha)^{-1} \dots 0]. \quad (12.37)$$

В общем виде основанное на фундаментальных переменных (*FB*) правило политики (не обязательно оптимальное) имеет вид $i_t = \psi_0 + \psi'_z z_t$. Подставляя это правило политики в структурную форму (12.32) и (12.33), мы получим следующую сокращенную форму:

$$\begin{aligned} x_t &= c^F + A^F \hat{E}_t x_{t+1} + \chi^F z_t, \text{ где } x_t = [\pi_t \dots y_t]', \\ z_t &= Fz_{t-1} + \varepsilon_t, \quad F = \text{diag}(\rho_i), \quad |\rho_i| < 1, \quad \varepsilon_{it} \text{ н.о.р.с.в. } (0, \sigma_i^2), \\ i &= \overline{1, k}, \end{aligned}$$

$$A^F = [\beta + \lambda\varphi \dots \lambda; \varphi \dots 1]. \quad (12.38)$$

Получив сокращенные формы, соответствующие оптимальным правилам монетарной политики, мы готовы проверить их на δ -стабильность. Для этого нужно проверить полученную в сокращенных формах матрицу A (12.37) или (12.38) на применимость достаточных и необходимых условий δ -стабильности. Мы имеем следующие результаты.

Утверждение 12.17. Общая NK модель со стационарным $AR(1)$ процессом наблюдаемых шоков (12.32), (12.33) и (12.34) δ -стабильна под влиянием оптимального EB правила монетарной политики.

Утверждение 12.18. Общая NK модель со стационарным $AR(1)$ процессом наблюдаемых шоков (12.32), (12.33) и (12.34) δ -нестабильна под влиянием FB правила монетарной политики (не обязательно оптимального).

Заметьте, что в работе [Evans, Honkapohja, 2003] имеются подобные результаты для однородного обучения.

12.6. Экономическая динамика малой DSGE-модели экономики России при неоднородном адаптивном обучении¹

В данном разделе в качестве примера экономической динамики при неоднородном адаптивном обучении рассматривается версия $DSGE$ -модели российской экономики с малым числом уравнений с неоднородным адаптивным обучением экономических агентов [Колужнов, Ляхнова, 2022], которая уже была оценена и использована нами для проведения сценарных расчетов по экономике России в ИЭОПП СО РАН.

Предполагается, что в экономике домашние хозяйства, представленные долей μ – «бедные» (нерикардянские), не делают сбережений на протяжении всей жизни, не имеют доступа к финансовым рынкам и потребляют весь свой располагаемый доход каждый период. Другая доля $(1-\mu)$ домохозяйств – это дальновид-

¹ Результаты этого раздела были отражены в наших работах [Колужнов, Ляхнова, 2023], [Колужнов Д., Колужнов Е., Ляхнова, 2023] и [Колужнов, Ляхнова, 2022]. Полное строгое построение модели можно посмотреть в этих работах.

ные (рикардианские) домохозяйства, которые осуществляют займы друг у друга, занимают за рубежом, инвестируют в физический капитал, а также получают прибыль. Для упрощения, рынок труда предполагается совершенно конкурентным, заработная плата одинакова для всех домохозяйств.

Фирмы в рамках данной модификации модели делятся на три основных типа, представляющих различные агрегированные сектора, которые формируют добавочную стоимость: предприятия нефтегазового и обрабатывающего (производящего промежуточные товары) сектора, а также предприятия-ритейлеры (формирующие конечное отечественное благо). В производственном секторе происходит распределение таких факторов производства, как труд, капитал (домашних хозяйств, государства и иностранных инвесторов), а также нефтегазовая продукция.

Также предполагается, что все фирмы обрабатывающего сектора принадлежат рикарданским «богатым» домохозяйствам, однако в то же время предприятиями нефтегазовой отрасли также владеет государство и иностранные инвесторы, а прибыль, после выплаты налога, распределяется между домохозяйствами, правительством и иностранцами в виде дивидендов.

Еще одним упрощением является предположение о том, что каждая фирма из нефтегазового сектора обладает производственной функцией, включающей в себя только капиталоемкие затраты, предполагая, что производство нефти/газа является капиталоемким сектором.

Основные уравнения конечной системы логлинеаризованных уравнений, описывающих равновесную динамику этой модели, выглядят следующим образом:

$$R_t = E_t \pi_{t+1} + (\varphi - 1)(\tilde{C}_t^S - E_t \tilde{C}_{t+1}^S) = \pi_{t+1}^e + (\varphi - 1)(\tilde{C}_t^S - E_t \tilde{C}_{t+1}^{S,e}) - \text{уравнение Эйлера,} \quad (12.39)$$

$$\pi_t^{no} = \beta \pi_{t+1}^{no,e} + \frac{(1 - \theta)(1 - \beta\theta)}{\theta(1 + \tau_{no}\beta)} \tilde{MC}_t^{no} - \text{уравнение}$$

$$\text{НК кривой Филлипса,} \quad (12.40)$$

$$\tilde{MC}_t^{no} = (1 - \alpha_1 - \alpha_2) \tilde{W}_t + \alpha_1 \tilde{P}_t^{k,no} - A_t^{no} + \alpha_2 \tilde{P}_t^{oil} - \text{уравнение предельных издержек,} \quad (12.41)$$

$$R_t = \rho_R R_{t-1} + (1 - \rho_R)(\varphi_\pi \pi_t + \varphi_{Ne} \tilde{N}e_t + \varphi_y \tilde{Y}_t^{no}) + shock_t^R - \quad (12.42)$$

правило Тейлора,

где введены обозначения, представленные в (табл. 12.4). Волны над переменными обозначают, что они выражены в терминах процентного отклонения от устойчивого состояния. Остальные уравнения изложены в статье [Колюжнов, Ляхнова, 2022].

Таблица 12.4

Обозначения переменных в системе уравнений

Обозначение	Смысл
R_t	номинальная внутренняя процентная ставка
π_t	общая инфляция (всех товаров и услуг)
π_t^{no}	инфляция внутреннего конечного товара
C_t^S	потребление «богатых» домохозяйств
Y_t^{no}	выпуск не нефтегазовых компаний
W_t	номинальная заработная плата
$P_t^{k,no}$	номинальная цена единицы реального не нефтяного капитала
P_t^{oil}	внутренняя цена на нефть (марки Brent)
Ne_t	номинальный обменный курс (доллара)
A_t^{no}	технологический шок не нефтегазовых фирм
$shock_t^R$	шок монетарной политики

Рассматриваемую нами модификацию логлинеаризованной *DSGE*-модели можно представить в виде многомерной линейной структурно однородной модели с двумя типами агентов (двумя подтипами домохозяйств типа *S*) с разными прогнозами, без лагов эндогенной переменной и с *t*-датировкой ожиданий, относящейся к классу моделей М III:

$$x_t = \mu + B_1 \hat{E}_t^1 x_{t+1} + B_2 \hat{E}_t^2 x_{t+1} + C z_t, \quad (12.43)$$

$$z_t = V z_{t-1} + \varepsilon_t, \quad (12.44)$$

где x_t – n -размерный вектор эндогенных переменных, z_t – $(k \times 1)$ вектор экзогенных переменных, следующий стационарному VAR, так что ε_t – вектор независимых шоков белого шума; V – диагональная матрица со всеми собственными значениями внутри единичного круга, $\hat{E}_t^i x_{t+1}$ – ожидания (не обязательно рациональные) эндогенных переменных агентом группы i , $i = 1, 2$, B_1, B_2 и C – матрицы размерности $(n \times n)$ и $(n \times k)$ соответственно, $B_i = \omega_i \bar{B}$, $i = 1, 2$, $\omega_1 + \omega_2 = 1$, ω_i – доля агентов группы i в общей численности агентов, формирующих ожидания.

Неоднородность в обучении учитывается в данной модификации в виде адаптивного обучения, когда один тип агентов (например тип 1) использует *RLS*, а другой (тип 2) – *SG*, т. е. при неоднородном смешанном *RLS/SG* обучении. Использование алгоритма *RLS* позволяет моделировать «более изощренных» агентов. Предположим, что воспринимаемые законы движения (*PLM*) агентов типа 1 и 2 выглядят соответственно:

$$x_t = q_t^1 + r_t^1 z_t' = \Psi_{1,t}' w_t, \quad (12.45)$$

$$x_t = q_t^2 + r_t^2 z_t' = \Psi_{2,t}' w_t. \quad (12.46)$$

Векторы x_t, z_t и w_t в соответствии с нашей моделью имеют следующий вид:

$$x_t = (\tilde{C}_t^S, \tilde{\pi}_t, \tilde{\pi}_t^{no})^T; \quad z_t = (\tilde{P}_t^{oil*}, \tilde{A}_t, \tilde{C}_{t-1}^S, \tilde{R}_t); \quad w_t = (1, z_t)^T.$$

Для перехода от рассчитанных каждым из двух методов значений ожидаемых переменных к значениям, образующимся методом смешанного неоднородного адаптивного обучения, мы получаем «средневзвешенное» значений, полученных при алгоритмах обучения *RLS* и *SG* с помощью долей ω_1, ω_2 . Ввиду того что метод *RLS* вычислительно сложнее, чем *SG*, мы делим всех агентов на два типа по факту наличия у них высшего образования. Исходя из этого «вес» значений, полученных мето-

дом RLS , составил 0,36 (поскольку в России около 36%¹ индивидов имеет высшее образование), а значений, полученных методом SG , соответственно, 0,64.

Для оценки параметров модели в исследовании использовались поквартальные временные ряды макроэкономических показателей для РФ в период с 1-го квартала 2000 г. по 4-й квартал 2020 г. При сборе поквартальных статистических данных по макроэкономическим показателям использовались такие официальные источники, как Федеральная служба государственной статистики, Банк России, World Bank Global Economic Monitor, Finam, OECD, журнал «ТЭК России», Федеральная налоговая служба РФ, Министерство финансов РФ. Априорные (экспертные) значения для параметров, оцениваемых байесовским методом, были взяты из научно-исследовательских работ [Крепцев, Селезнев, 2016], [Ивашенко, 2016], [Algozhina, 2016], [Ferrero, Seneca, 2015], и др.

Полученные после применения метода Байеса апостериорные средние значения для параметров оказались достаточно близкими к своим априорным оценкам. Для модели с неоднородным адаптивным обучением значение функции правдоподобия оказалось несколько выше, чем для модели с RE , а также 90%-е доверительные интервалы всех параметров оказались уже, чем при подходе RE , что может говорить о том, что оценки параметров, полученные по модели с неоднородным адаптивным обучением лучше в рамках предоставленной статистики, и данная модель качественнее приближает параметры по реальной статистике.

Для оценки способности модификаций модели прогнозировать временные ряды нами были построены ретроспективные прогнозы для ключевых переменных. В качестве интервала для тестирования был взят период с 1-го квартала 2015 г. по 4-й квартал 2020 г.

¹ Рассчитано авторами на основе базы данных RLMS – HSE, обращалось внимание на сведения о наличии у индивида высшего образования (включая ученые степени и аспирантуру).

Сперва мы сравнили соответствие значений нескольких используемых в модели «вперед смотрящих» (ожидаемых) переменных – инфляции и потребления сберегателей реальной экономической динамике для разных модификаций модели (с точки зрения модели формирования ожиданий). Нами были рассчитаны MAE и MSE для каждой модификации модели. Для всех показателей значения MAE и MSE для модели с неоднородным АО оказались меньше, чем для модели с *RE* (табл. 12.5).

Также мы сравнили, насколько рассчитанные по модели с неоднородным АО ожидания вперед смотрящих переменных ближе к фактическим значениям, чем те, которые получаются в моделях с однородным АО – например, при использовании только алгоритма RLS или только SG. Из таблицы следует, что для потребления и инфляции внутренних цен модель с неоднородным АО действительно оказывается лучшей, а вот для показателя инфляции уже модель с однородным RLS обучением несколько лучше (см. табл.12.5). Таким образом, в целом, ожидания, получаемые по модели с неоднородным АО, оказываются ближе к наблюдаемым в реальности данным.

Таблица 12.5

Оценка качества прогноза ожидаемых переменных

MSE	C_S	Infl	infl_no
Рациональные ожидания	0,154	1,195	2,084
Неоднородное смешанное RLS/SG обучение	0,022	1,179	1,415
Однородное обучение по RLS	0,023	0,765	3,600
Однородное обучение по SG	0,062	3,026	2,010
MAE	C_S	Infl	infl_no
Рациональные ожидания	0,388	0,909	1,027
Неоднородное смешанное RLS/SG обучение	0,130	0,884	0,882
Однородное обучение по RLS	0,132	0,638	1,584
Однородное обучение по SG	0,228	1,615	1,225

Также нами были построены и ретроспективные прогнозы для ключевых переменных – инфляции, выпуска не нефтяных фирм, потребления, процентной ставки и обменного курса, и бы-

ла проведена оценка качества прогнозов через оценку ошибок прогнозов, а именно через расчет и сравнение показателей MAE, MSE и RMSE для каждой из моделей. Исходя из расчетов, при использовании модели с неоднородным АО для всех показателей значения MAE, MSE и RMSE оказались существенно ниже, следовательно, эта модель действительно дает более точные результаты и лучше отражает российскую действительность.

Построенная в данной работе малая *DSGE*-модель вносит вклад в исследования, касающиеся динамических стохастических моделей общего экономического равновесия, отклоняющихся от стандартного предположения о рациональных ожиданиях, и потенциально может быть применима в качестве не сильно громоздкого инструмента для анализа и прогнозов динамики экономики России, а полученные в результате выводы об оптимальной политике могут быть использованы при формировании экономической политики государства.

ВЫВОДЫ

Наше исследование привносит вклад в область изучения адаптивного обучения в макроэкономических моделях. Все разделы главы связаны вопросом поведения экономической динамики в окрестности точки равновесия в моделях с адаптивным обучением экономических агентов. Второй, третий и четвертый разделы главы приносят вклад в область неоднородного адаптивного обучения. В них мы получаем условия стабильности структурно неоднородной экономики при неоднородном обучении в форме смешанного *RLS/SG* обучения с (возможно) различными степенями инерции агентов. Эти условия имеют сильное теоретическое и практическое применение.

С точки зрения теории, показывается, что эти условия сформулированы с использованием таких теоретически разумных понятий, как агрегированная экономика и подэкономика, а понятие стабильности при однородном обучении (*E*-стабильность) связывается с понятием стабильности при неоднородном обучении (δ -стабильности).

Практическая значимость результатов нашего исследования заключается в том, что полученные нами условия стабильности показывают, какие правила денежно-кредитной и фискальной по-

литики приводят к контролируемой стабильной динамике макропоказателей при любом варианте неоднородности в ожиданиях экономических агентов, а какие приводят к нестабильности в экономике. Более того, полученные нами условия стабильности дают конкретные численные рекомендации по выбору правил такой политики, основываясь на оцененной для данной экономики модели общего экономического равновесия (например, *DSGE*-модели) с ожиданиями.

В пятом разделе главы мы на теоретическом примере оптимальных правил денежно-кредитной политики и практическом примере разных типов правил Тейлора на базовой *NK DSGE*-модели демонстрируем применимость полученных условий.

Еще одним результатом можно считать получение условий стабильности в качестве теоретического обоснования существования равновесий в таких моделях с неоднородным обучением, что дает возможность применения их для моделирования реальной экономической динамики. В шестом разделе рассматривается такое моделирование реальной макроэкономической динамики с адаптивным эконометрическим обучением агентов – *DSGE*-модель российской экономики с малым числом уравнений. Сравнивая разные модификации модели – через проведение различных оценок, построение ретроспективных прогнозов, расчет показателей ошибок – делается вывод, что модель с неоднородным адаптивным обучением агентов соответствует данным лучше, чем модель с рациональными ожиданиями или однородным адаптивным обучением.