Д.В. Колюжнов, А.С. Богомолова

НЕПРЕРЫВНО-ВРЕМЕННОЙ ПОДХОД К АНАЛИЗУ ДИНАМИКИ ВЫБЕГАНИЙ В ДИНАМИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ С АДАПТИВНЫМ ОБУЧЕНИЕМ ЭКОНОМИЧЕСКИХ АГЕНТОВ

Адаптивное обучение и его роль в макроэкономике

До недавнего времени гипотеза о рациональных ожиданиях агентов была важным предположением в исследованиях, изучающих модели экономической динамики. Позднее стало появляться все больше и больше исследований, ставящих под вопрос верность этой гипотезы, среди них работы Фукса [1]; Фукса и Ларока [2]; Грандмо [3, 4]; Грандмо и Ларока [5]; Брей [6]; Брей и Савина [7]; Форжо, Горьеру и Праделя [8]; Марсе и Сарджента [9]; Эванса и Хонкапойи [10, 11, 12]; Арифович [13]; Кирмана и Вринда [14]; Чо и Сарджента [15]; Маримона [16]; Гианнитсару [17]; Хонкапойи и Митры [18]; Чо и Касы [19]; и многие другие. Необходимость изучения моделей с ограниченной рациональностью агентов была веско обоснована Сарджентом [20]. Позднее этот подход был также принят (среди многих других) в работах Эванса и Хонкапойи, и стандартные аргументы в защиту применения ограниченной рациональности можно найти у Эванса и Хонкапойи [21], а также у Сарджента [20].

Подход рациональных ожиданий (RE) предполагает, что агенты обладают большим количеством знаний об экономике (например, о структуре модели и значениях ее параметров), в то время как в эмпирических исследованиях экономисты, предполагающие равновесия при рациональных ожиданиях в своих теоретических моделях, не знают значений параметров и вынуждены оценивать их эконометрически. Как обосновывает Сарджент [20], представляется более естественным предполагать, что в данной экономике агенты сталкиваются с такими же ограничениями, и рассматривать агентов как эконометристов (или статистиков) при прогнозировании будущего состояния экономики, которые оценивают прогнозные модели, используя стандартные статистические процедуры, например, метод наименьших квадратов, и формируют убеждения об экономической модели. Убеждения, сформированные таким образом, затем используются для выработки действий агентов, и таким образом, влияют на реализуемые значения экономических переменных, которые берутся агентами в качестве новой точки информационного множества. В следующем периоде агенты обновляют свои убеждения, используя новые данные. Новые убеждения затем влияют на действия агентов и экономические переменные, и этот процесс повторяется период за периодом.

Такая процедура обновления убеждений называется адаптивным обучением экономических агентов, и этот подход к моделированию экономических агентов представляет собой особую форму ограниченной рациональности и называется подходом, основанным на адаптивном (эконометрическом) обучении.

Адаптивное обучение в макроэкономике играет несколько ролей.

Во-первых, оно используется для проверки верности гипотезы о рациональных ожиданиях, в частности, чтобы выяснить, может ли динамика экономической системы с ограниченно рациональными агентами сойтись к равновесию при рациональных ожиданиях (REE) при каком-то правиле обучения.

Во-вторых, оно используется как инструмент выбора в моделях с множественным REE. Выбранное REE и есть то, которое следует ожидать на практике.

В-третьих, динамика при обучении сама по себе может представлять интерес, в том смысле что она может быть использована для объяснения поведения макроэкономических данных.

И, в-четвертых, алгоритмы обучения могут быть использованы как метод для расчета REE в модели. Преимущество этого метода заключается в том, что можно вычислить только те REE, которое могут быть выучены.

Динамика выбеганий

Адаптивное обучение агентов порождает флуктуирующее поведение макроэкономических индикаторов, таких как темп инфляции и уровень безработицы. Эти флуктуации можно характеризовать аналитически, используя две силы, которые существуют в такой динамической системе: динамика среднего, которая двигает систему к точке слабой сходимости, и динамика выбеганий, которая двигает систему от этой точки.

Значительные усилия исследователей в этой области были затрачены на получение аналитических характеристик второй силы, динамики выбеганий. Подход, получивший слегка большее развитие в литературе, такой как статьи Чо, Вильямса и Сарджента [22] (далее CWS) и Вильямса [23], основывается на получении аналитических характеристик динамики выбеганий для изначального процесса обучения в дискретном времени. Этот подход имеет как теоретические, так и практические проблемы. Теоретическая проблема заключается в том, что для случаев, когда шок на процесс переменной состояния неограниченный (например, Гауссовский), то не существует теоретических результатов, позволяющих дать полное описание динамики выбеганий. В частности, теория в данном случае не позволяет сказать, каково будет наиболее вероятное направление отклонений от точки сходимости и каково предельное поведение ожидаемого времени первого такого выбегания.

Практическая проблема заключается в том, что получение характеристик динамики выбеганий для дискретно-временного процесса, предложенное Вильямсом [23], подразумевает численное решение системы нелинейных дифференциальных уравнений с численно заданными функциями. Когда структура процесса переменной состояния имеет много лагов (многомерная переменная состояния), это система вряд ли решается.

В своей работе [24] мы предлагаем другой способ получения аналитических характеристик динамики выбеганий, который разрешает вышеобозначенные проблемы. В рамках этого подхода предлагается сначала получить непрерывно-временную аппроксимацию рассматриваемой рекурсивной динамической системы, а затем применить аналитический аппарат, разработанный Фрейдлином и Венцелем [25] для аналитической характеризации динамики выбеганий.

Этот подход относительно новый в литературе. В единственной существующей статье Касы [26] этот подход рассматривается лишь для очень простого одномерного случая, который нельзя легко обобщить. Применение предлагаемого подхода может быть очень полезным в сложных нелинейных экономических моделях. В случае большой размерности и лаговой структуры лежащей в основе модели, издержки получения динамики выбеганий для линеаризованной дискретно-временной модели могут оказаться очень большими по сравнению с издержками непрерывно-временного подхода.

В нашей статье [24] «Динамика выбеганий: аппроксимация в непрерывном времени» (написанной в соавторстве с Сергеем Слободяном) мы расширяем непрерывно-временной подход к анализу динамики выбеганий в экономических моделях с адаптивным обучением с постоянным коэффициентом приращения. Этот подход основан на применении результатов непрерывно-временной версии теории больших отклонений к диффузионной аппроксимации изначальной дискретно-временной динамики при обучении. В этой статье мы характеризуем динамику выбеганий, получая аналитически значения наиболее вероятной точки выбегания и среднего времени выбеганий. Предлагаемый непрерывно-временной подход тестируется на задаче Фелпса, в которой правительство контролирует инфляцию, одновременно адаптивно изучая аппроксимацию кривой Филлипса, рассмотренной до этого Сарджентом [27] и CWS. Мы сравниваем наши теоретические результаты с результатами имитационного моделирования и теоретическими результатами, полученными CWS.

Как результат нашего анализа, мы не спешим с выводом о применимости теории больших отклонений для характеризации среднего времени выбеганий для экономически содержательных значений постоянных коэффициентов приращения в модели CWS. Мы показываем, что для этих значений коэффициентов приращения простые соображения и формулы работают намного лучше, чем результаты теории больших отклонений. Мы объясняем это недостаточным усреднением возле точки самоподтверждающегося равновесия для относительно больших значений коэффициентов приращения и предлагаем два изменения для улучшения эффективности работы подходов, основанных на теории больших отклонений, на этой области коэффициентов приращения.

Включение непрерывно-временного подхода в анализ мотивировано ограниченной применимостью и вычислительной сложностью похода, использованного для получения теоретических характеристик динамики выбеганий в недавней экономической литературе. Теоретический анализ динамики выбеганий в экономических моделях с адаптивным обучением позволяет теоретически характеризовать разнообразные экономические явления, такие как валютные кризисы, инфляцию, эндогенные сговоры в олигополии и циклы экономической активности. (см. Чо и Каса [19]; Вильямс [23, 28, 29, 30]; Буллард и Чо [31]; Чо и др. [22]; Каса [26]). Динамика выбеганий также использовалась для изучения больших мутаций в эволюционных играх (см. Кандори, Майлат, и Роб [32]; и Бинмор и Самуэльсон [33]).

В этой литературе эти явления моделируются как результат динамики выбеганий в экономических моделях с ограниченно рациональными экономическими агентами, которые используют адаптивное обучение в форме, недавно резюмированной Эвансом и Хонкапойей [21], для обновления своих убеждений об экономической модели. Среди литературы, посвященной этой форме адаптивного обучения, можно выделить статьи Брэй [6]; Брэй и Савина [7]; Форжо, Горьеру и Праделя [8]; Марсе и Сарджента [9]; Эванса и Хонкапойи [10, 11, 12]; Маримона [16]; и многие другие. В этой литературе агенты рассматриваются как эконометристы, которые оценивают прогнозные модели с использованием стандартных статистических процедур, таких как метод наименьших квадратов, метод стохастического градиента, или Байесовское обучение, и формируют убеждения об экономической модели. Убеждения, сформированные таким образом, затем используются для выработки действий агентов, и таким образом, влияют на реализуемые значения экономических переменных, которые берутся агентами в качестве новой точки информационного множества. В следующем периоде агенты обновляют свои убеждения, используя новые данные. Новые убеждения затем влияют на действия агентов и экономические переменные, и этот процесс повторяется период за периодом.

Объединенная динамика параметров, характеризующих убеждения агентов, и наблюдаемых экономических переменных задает стохастический рекурсионный алгоритм (SRA). При некоторых условиях регулярности SRA, соответствующий конкретному процессу адаптивного обучения, сходится к равновесию при рациональных ожиданиях (REE) модели (или одному из REE в моделях с множественным равновесием), и таким образом, предельная динамика при адаптивном обучении совпадает с динамикой при рациональных ожиданиях. Стабильность при адаптивном обучении, гарантирующая такую сходимость, рассматривается как очень важная характеристика REE в недавней литературе по монетарной политике (см., например, статьи Эванса и Хонкапойи [34] или Булларда и Митры [35]).

Кроме использования адаптивного обучения в качестве фактического механизма выбора равновесия или средства для разработки правил экономической политики, можно сконцентрировать свое внимание на динамике модели при адаптивном обучении как таковой, в частности, в случае адаптивного обучения с постоянным коэффициентом приращения. В этом случае сходимость процесса обучения к REE происходит только по распределению: существуют устойчивые флуктуации вокруг REE, вызванные таким обучением, и таким образом, редкие явления – отклонения на большие расстояние, называемые «выбеганиями» – могут происходить с ненулевой вероятностью. Во время выбегания убеждения агентов о модели отклоняются в сторону от околорациональных ожиданий. Как правило, их действия и значения релизуемых экономических переменных также отклоняются от наблюдаемых в REE.

Анализ такой динамики выбеганий, вызванной процессом адаптивного обучения, возможен с использованием теории больших отклонений Фрейдлина и Венцеля [25] (далее FW); Дюпуи и Кушнера [36]; и других. В зависимости от того, какую версию теории больших отклонений – для непрерывных во времени процессов Фрейдлина и Венцеля, или для процессов в дискретном времени Дюпуи и Кушнера [36] – использовать, существует два возможных подхода к теоретическому анализу динамики выбеганий: дискретно-временной подход и непрерывно-временной подход. Дискретно-временной подход, получивший большее внимание в литературе, основывается на аналитическом выводе динамики выбеганий для изначального дискретно-временного SRA, используемого для описания процесса обучения. В рамках непрерывно-временного подхода сначала выводится непрерывно-временная диффузионная аппроксимация дискретно-временного SRA, а затем динамика выбеганий изучается для этой аппроксимации. Каса [26] применил этот подход к простой одномерной модели. В нашей статье мы расширяем этот подход до многомерного недостижимого случая.

Первый подход использовался в большинстве статей, на которые мы ссылались выше, в частности в статье Чо, Вильямса и Сарджента [22] (далее CWS). Эти статьи работают напрямую с дискретно-временными SRA процессами и используют недавние результаты Вильямса [23], который получил численно функционал действия для линейно-квадратического случая, когда процесс переменной состояния представляет собой авторегрессию с Гауссовским шумом.

Существует три проблемы, связанные с вышеупомянутым подходом. Во-первых, если процесс переменной состояния подвержен неограниченным (например, Гауссовским) шокам, дискретно-временная версия теории больших отклонений не содержит теоретических результатов, позволяющих получить полное описание динамики выбеганий. В частности, нет результатов по наиболее вероятной точке выбеганий из окрестности точки сходимости (как утверждалось выше, этой точкой обычно является REE) и ожидаемому времени до первого выбегания (см. CWS, Теорема 5.3). Во-вторых, получение характеристик динамики выбеганий для дискретно-временного процесса способом, предлагаемым Вильямсом [23], подразумевает численное задание функционала в задаче вариационного исчисления, которое приводит к системе нелинейных дифференциальных уравнений с численно заданными функциями в правой части. Для усложненных задач (много лагов, большая размерность), этот подход может стать численно неподъемным. Наконец, аналитическое решение для динамики выбеганий дискретно-временного процесса может быть получено только для ограниченной формы процесса обучения, такого как рекурсивный метод наименьших квадратов или метод стохастического градиента с постоянным коэффициентом приращения.

Непрерывно-временной подход, развиваемый в этой статье, разрешает эти проблемы. Поскольку диффузия является естественной аппроксимацией для разностного уравнения с Гауссовским шумом и поскольку FW разработали теорию больших отклонений для диффузий, проблема недостаточных теоретических результатов отпадает. Вторая и третья проблемы слегка облегчаются, поскольку диффузия, полученная путем аппроксимации вокруг REE – стационарной точки SRA – линейная. В теории больших отклонений все характеристики динамики выбеганий – ожидаемое время выбегания убеждений из любой заданной окрестности D, наиболее вероятная точка, через которую происходит выбегание, и вероятность выбегания из D за определенный отрезок времени – получаются путем минимизации так называемого функционала действия на границе окрестности, ∂D. Благодаря нашему выбору линейной аппроксимирующей диффузии, эта минимизация представляет собой стандартную задачу теории линейного контроля, и задача минимизации функционала действия сводится к тривиальной задаче поиска минимума квадратичной формы на ∂D.

Для того, чтобы сравнить работу двух подходов к получению характеристик динамики выбеганий, развиваемый здесь непрерывно-временной подход тестируется на модели, для которой характеристики динамики выбеганий уже были получены, используя дискретно-временной подход. Это задача Фелпса, в которой правительство контролирует инфляцию, одновременно адаптивно изучая аппроксимацию кривой Филлипса, рассмотренная до этого Сарджентом [27] и CWS.

Постановка модели Фелпса

Экономика состоит из правительства и частного сектора. Правительство использует инструмент монетарной политики x_n для контроля темпа инфляции π_n и старается минимизировать потери от инфляции и безработицы U_n. Оно убеждено (в общем, ошибочно) в том, что существует обратная зависимость между π_n и U_n (кривая Филлипса), которая может быть потенциально использована. Настоящая кривая Филлипса подвержена случайным сдвигам и содержит эту обратную зависимость только для неожиданных инфляционных шоков. Частный сектор обладает рациональными ожиданиями $\widehat{x}_n = x_n$ о темпе инфляции, и таким образом неожиданные инфляционные шоки возникают только из ошибок монетарной политики.

$$U_n = u - \theta\left(\pi_n - \widehat{x}_n\right) + \sigma_1 W_{1n},\ u > 0,\ \theta > 0, \tag{1a}$$

$$\pi_n = x_n + \sigma_2 W_{2n}, \tag{1b}$$

$$\widehat{x}_n = x_n, \tag{1c}$$

$$U_n = \gamma_1 \pi_n + \gamma_{-1}^T X_{n-1} + \eta_n \tag{1d}$$

Вектор $\gamma = \left(\gamma_1, \gamma_{-1}^T\right)^T$ представляет убеждения правительства о кривой Филлипса. W_{1n} и W_{2n} есть два нескоррелированных Гауссовских шока с нулевым средним и единичной дисперсией. η_n есть шок кривой Филлипса, как он воспринимается правительством, которое убеждено в том, что он является белым шумом нескоррелированным с регрессорами π_n и X_{n-1}. Следуя CWS, мы рассматриваем две версии модели: «динамическую» и «статическую». В «динамической» модели, вектор X_{n-1} содержит два лага темпа инфляции и темпа безработицы и константу,

$$X_{n-1} = \left(U_{n-1} \quad U_{n-2} \quad \pi_{n-1} \quad \pi_{n-2} \quad 1\right)^T, \tag{2}$$

в то время как только константа представлена в X_{n-1} в «статической» версии модели.

Другими словами, единственная разница между двумя версиями модели лежит в структуре убеждений правительства (1d), которые более «изощренные» в динамической модели.

При данных убеждениях γ, правительство решает

$$\min_{\{x_n\}_{n=0}^{\infty}} E\sum_{n=0}^{\infty} \beta^n \left(U_n^2 + \pi_n^2\right), \tag{3}$$

на ограничениях (1b) и (1d). Эта линейно-квадратическая задача имеет решением линейное правило монетарной политики

$$x_n = h(\gamma)^T X_{n-1}. \tag{4}$$

Равновесия по Нэшу, по Рамсею и самоподтверджающееся равновесие

CWS определяют три типа убеждений, совместимых с моделью. Если правительство имеет Убеждения 1, $\gamma = \left(-\theta \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad u(1+\theta)^2\right)^T$, функция правила политики принимает вид $x_n = \theta u$. В модели правительства, знающего истинную кривую Филлипса (1a), это приводит к равновесию по Нэшу, или дискреционному равновесию Сарджента [27] и Барро и Гордона [37, 38]. Убеждения 2 вида $\gamma = \left(-\theta \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad u^*\right)^T$ приводят к $x_n = 0$ и нулевой инфляции для любого u^*: равновесию по Рамсею, или оптимальному несостоятельному во времени равновесию Кидланда и Прескотта [39]. Наконец, Убеждения 3, где $\gamma_1 + \gamma_4 + \gamma_5 = 0$ (сумма коэффициентов перед текущей и лаговой инфляцией равна нулю) асимптотически приводят к $x_n = 0$: это убеждения «гипотезы индукции» (см. Сарджент [27]).

В модели с обучением равновесие определяется как вектор убеждений, при котором предположения правительства об ортогональности η_n пространству регрессоров совместимы с наблюдениями:

$$E\left[\eta_n \cdot \left(\pi_n, X_{n-1}\right)^T\right] = 0. \qquad (5)$$

CWS называют эту точку *самоподтверждающимся равновесием*, или SCE: несмотря на тот факт, что правительство верит в неверную кривую Филлипса (1d), конкретное предположение о ней, представленное (5), оказывается верным. Вильямс [23] показывает, что единственным SCE в модели являются Убеждения 1.

Адаптивное обучение и SRA

В период *n* правительство использует текущий вектор своих убеждений γ_n, чтобы решить (3), предполагая, что убеждения никогда не изменятся. Таким образом, сгенерированное действие монетарной политики x_n верно предвидится частным сектором и производит U_n согласно (1a). Затем правительство приспосабливает свои убеждения о коэффициентах кривой Филлипса γ_n и матрице их ковариаций R_n на шаге адаптивного обучения. Определим $\xi_n = \begin{bmatrix} W_{1n} & W_{2n} & X_{n-1}^T \end{bmatrix}^T$, $g(\gamma_n, \xi_n) = \eta_n \cdot (\pi_n, X_{n-1}^T)^T$, и $M_n(\gamma_n, \xi_n) = (\pi_n, X_{n-1}^T)^T \cdot (\pi_n, X_{n-1}^T)$. Убеждения следующего периода γ_{n+1} и R_{n+1} задаются как

$$\gamma_{n+1} = \gamma_n + \varepsilon_n R_n^{-1} g(\gamma_n, \xi_n), \tag{6a}$$

$$R_{n+1} = R_n + \varepsilon_n (M_n(\gamma_n, \xi_n) - R_n). \tag{6b}$$

Уравнения (6) представляют специфическую форму рекурсивного алгоритма обучения.

Когда последовательность коэффициентов приращения ε_n задана в виде $1/n$, подходящий выбор γ_0 и R_0 порождает обычный МНК в рекурсивной форме. Когда $\varepsilon_n = const$, это так называемый алгоритм обучения *с постоянным коэффициентом приращения* или алгоритм слежения.

Поскольку

$U_n = u - \theta\sigma_2 W_{2n} + \sigma_1 W_{1n}$ и $\pi_n = h(\gamma)^T X_{n-1} + \sigma_2 W_{2n}$, эволюция вектора состояний ξ_n может быть записана как

$$\xi_{n+1} = A(\gamma_n)\xi_n + BW_{n+1}, \tag{7}$$

где $W_{n+1} = \begin{bmatrix} W_{1n+1} & W_{2n+1} \end{bmatrix}^T$, для некоторых матриц $A(\gamma_n)$ и *B*. Наконец, запишем один под другим неполные столбцы, состоящие только из поддиагональных элементов симметричной матрицы R_n (включая диагональ) в вектор, $vech(R_n)$, и сформируем вектор параметров

$$\theta_n^\varepsilon = \left[\gamma_n^T, vech^T(R_n)\right]^T \tag{8}$$

и вектор правой части

$$H(\theta_n^{\varepsilon}, \xi_n) = \left[\left(R_n^{-1} g(\gamma_n, \xi_n) \right)^T, vech^T \left(M_n(\gamma_n, \xi_n) - R_n \right) \right]^T. \quad (9)$$

Тогда динамика модели при обучении с постоянным коэффициентом приращений может быть записана как

$$\theta_{n+1}^{\varepsilon} = \theta_n^{\varepsilon} + \varepsilon H\left(\theta_n^{\varepsilon}, \xi_n\right), \tag{10a}$$

$$\xi_{n+1} = A(\gamma_n)\xi_n + BW_{n+1}, \tag{10b}$$

что является стандартной формой SRA.

Непрерывно-временной подход

Сходимость SRA и аппроксимирующая диффузия

Определим аппроксимирующие обыкновенные дифференциальные уравнения (ОДУ), соответствующие нашему SRA, следующим образом

$$\dot{\gamma} = R^{-1}\overline{g}(\gamma) = R^{-1}E\left[g(\gamma, \xi_n)\right], \tag{11a}$$

$$\dot{R} = \overline{M}(\gamma) - R = E\left[M_n(\gamma, \xi_n)\right] - R. \tag{11b}$$

Вектор $\bar{\gamma}$, формирующий Убеждения 1, и соответствующая ему матрица вторых моментов $\overline{R}$ являются единственным равновесием записанного выше ОДУ. Это равновесие стабильно. CWS показывают, что при определенных предположениях непрерывно-временной процесс $\theta_{\varepsilon t}$, задаваемый как $\theta_{\varepsilon t} = \theta_n^{\varepsilon}$ для $t \in \left[n\varepsilon, (n+1)\varepsilon\right)$ слабо сходится (по распределению) к $\theta(t,a) = \left[\gamma^T, vech^T(R)\right]^T$, решению ОДУ (11), где $a = \theta(0)$ есть начальное условие для этого ОДУ (11), и стартовая точка для процесса $\theta_{\varepsilon t}$. Это решение также называется «траекторией динамики среднего» SRA (10), где правая часть (11) является «динамикой среднего».

Из-за обучения с постоянным коэффициентом приращения, сходимость θ_n^{ε} к траектории динамики среднего $\theta(t)$ только слабая (по распределению). Это подразумевает постоянные флуктуации вокруг траектории $\theta(t, a)$ и ее стационарной точки $\overline{\theta}$. Теория больших отклонений изучает вероятность редких явлений, во время которых эти флуктуации выталкивают стохастический процесс θ_n^ε за любую заданную область вокруг траектории сходимости $\theta(t, a)$. Фрейдлин и Венцель [34, с. 6] утверждают, что вероятности этих случайных событий «имеют асимптоты вида $\exp\left\{-C\varepsilon^{-2}\right\}$ по мере того как ε → 0 (грубые асимптоты, то есть не до эквивалентности, а до логарифмической эквивалентности)».

Теоретические результаты FW по характеристикам динамики выбеганий в непрерывном времени могут быть применены к непрерывно-временной аппроксимации изначального дискретно-временного SRA. В этом и есть суть непрерывно-временного подхода. Эванс и Хонкапойя [29, Утв. 7.8] показывают, что по мере того как ε → 0, процесс $U_t^\varepsilon = \dfrac{\theta_t^\varepsilon - \theta(t,a)}{\sqrt{\varepsilon}}$ сходится (слабо) к следующей диффузии:

$$dU_t^\varepsilon = D_\theta p\big(\theta(t,a)\big)U_t^\varepsilon dt + \Sigma^{1/2}\big(\theta(t,a)\big)dW_t, \tag{12}$$

где W_t есть многомерный Броуновский процесс с размерностью равной размерности θ, $p(\theta)$ есть вектор динамики среднего, а Σ – матрица, элементы которой являются ковариациями разных компонент вектора динамики среднего, и тот и другой, определяемые по отношению к единственному инвариантному распределению вероятностей $\Gamma_\theta(dy)$ вектора состояний X:

$$p(\theta) = \int H(\theta, y)\Gamma_\theta(dy), \tag{13}$$

$$\Sigma_{ij} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} Cov\big[H_i\big(\theta, X_k(\theta)\big), H_j\big(\theta, X_k(\theta)\big)\big]. \tag{14}$$

Этот результат позволяет получить непрерывно-временную аппроксимацию, для любого данного начального условия:

$$d\theta_t^\varepsilon = D_\theta p\big(\theta(t,a)\big)\big[\theta_t^\varepsilon - \theta(t,a)\big]dt + \sqrt{\varepsilon}\Sigma^{1/2}\big(\theta(t,a)\big)dW_t. \tag{15}$$

Вильямс [64, Теорема 3.2] показывает, что полученный выше результат может быть использован для получения локальной непрерывно-временной аппроксимации SRA около предельной точки θ (стабильной точки ассоциированного ОДУ (11), SCE):

$$d\varphi_t = D_\theta p(\bar{\theta})\varphi_t dt + \sqrt{\varepsilon}\Sigma^{1/2}(\bar{\theta})dW_t, \tag{16}$$

где $\varphi_t = \theta_t - \bar{\theta}$ есть отклонения от SCE. Левый верхний 6×6 угол матрицы $\Sigma(\bar{\theta})$ равен матрице четвертых моментов Q у CWS, посчитанной в точке θ. Матрицы $D_\theta p(\bar{\theta})$ и $\Sigma(\bar{\theta})$ необходимо посчитать только в SCE. Это можно сделать аналитически.

Диффузия (16), используемая в этой статье, аппроксимирует сильно нелинейный многомерный SRA только в стационарной точке динамики среднего. Дембо и Зейтоуни [40, с. 223] утверждают, что «рациональное зерно этого в том, что любое удаление от стабильной точки имеет подавляюще высокую вероятность быть отдернутым назад к ней, и для этого имеет значение не время, проведенное около какого-либо участка ∂D, а априорный шанс прямого быстрого выбегания из-за наличия участка траектории Броуновского движения с малой вероятностью».

Функционал действия и выбегания

Предположим, что у нас есть стохастический процесс, например, некоторая диффузия. Основная идея теории больших отклонений для траекторий стохастических процессов заключается в том, что вероятность отклонения стохастического процесса от данной конкретной траектории может быть определена значением определенного функционала (называемого функционалом действия) на этой траектории. Функционал действия $I_{0T}(\varphi)$ представляет затраты, связанные с движением вдоль какой-то траектории φ в течение периода времени [0, T]. Функция затрат $I(T,x,y) = \min_{\varphi_0 = x, \varphi_T = y} I_{oT}(\varphi)$ есть минимальные затраты, требуемые для перехода из x в y за время T. Квазипотенциал $I(x,y) = \inf_{T>0} I(T,x,y)$ это минимальные затраты, необходимые для перехода из x в y в течение любого (потенциально бесконечного) времени. Идея здесь заключается в том, что система движется в направлении, вдоль которого она несет наименьшие издержки.

Предположим, что такой функционал существует. У нас есть некоторая окрестность D стационарной точки дрейфа диффузии, O. При определенных предположениях можно получить вероятность того, что стохастический процесс принадлежит D из минимального значения квазипотенциала I(O, y) на границе D, $\{y : y \in \partial D\}$. Наиболее вероятная точка, через которую стохастический процесс покидает (выбегает) D, есть точка, в которой I (O, y) достигает минимума. Минимум I(O, y) также позволяет получить асимптотическое поведение среднего времени выбеганий, то есть ожидаемого времени, необходимого для того, чтобы стохастический процесс пересек границу D первый раз.

Точные результаты по среднему времени выбеганий и доминантной точке выбегания даны в книге Дембо и Зейтоуни [40, Теорема 5.7.11]. В частности, предельное поведение среднего времени выбеганий, $E_x(\tau^{\varepsilon})$, задается

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon \ln E_x(\tau^{\varepsilon}) = \bar{I}, \tag{17}$$

где $\bar{I}$ есть минимальное значение квазипотенциала на ∂D. Наиболее вероятная точка выбегания есть экстремал квазипотенциала на ∂D.

Минимизация функционала действия

Для диффузии $d\varphi_t = A\varphi_t dt + \sqrt{\varepsilon} B dW_t$, Дембо и Зейтоуни [40, с. 214] дают следующее выражение для функционала действия:

$$I_{0T}(\varphi) = \inf \frac{1}{2} \int_0^T \left| \dot{g}_t \right|^2 dt, \tag{18a}$$

$$\text{s.t.}\, \dot{\varphi}_t = A\varphi_t + B\dot{g}_t, \tag{18b}$$

$$\varphi_0 = 0, \tag{18c}$$

где предполагается, что стационарная точка дрейфа O является стартовой. Минимизация производится по всем возможным траекториям $\dot{g}_t = u_t$, которые приводят систему от стартовой точки к φ_T ровно за T единиц времени. В аппроксимирующей диффузии (16) матрица A равняется $D_\theta p\left(\bar{\theta}\right)$, а $B = \Sigma^{1/2}(\bar{\theta})$.

Единственная сложность в этой формулировке проистекает из того факта, что матрица $B = \Sigma^{1/2}(\overline{\theta})$ может быть вырождена. В результате могут существовать точки в пространстве состояний, которых нельзя достигнуть ни за какое время ни по какой траектории контроля $\{u_t\}_{t=0}^{\infty}$: система (*A, B*) не обязательно достижима. Способом подступа к задаче контроля для недостижимой системы является трансформация пространства состояний таким образом, что первые k новых координат (z_1) формировали базис достижимого подпространства, в то время как оставшиеся *n–k* (z_2) координат все равны нулю. В этих координатах, эволюция системы на достижимом подпространстве управляется

$$\dot{z}_1 = \overline{A}_1 z_1 + \overline{B}_1 u \,, \tag{19}$$

где $z_1 = (T_1)^T \varphi$, T_1 есть базис достижимого подпространства, а система $(\overline{A}_1, \overline{B}_1)$ по построению достижима; построение см. у Далеха и др. [41, Гл. 22]. Функционал действия (18) затем переписывается в виде

$$I_{0T}(z_1) = \inf \frac{1}{2}\int_0^T \left|\dot{g}_t\right|^2 dt \,, \tag{20a}$$

$$\text{s.t.}\ \dot{z}_1 = \overline{A}_1 z_1 + \overline{B}_1 u \,, \tag{20b}$$

$$z_1(0) = 0 \,. \tag{20c}$$

Для того чтобы найти $\overline{I}$, необходимо минимизировать $I_{0T}(z_1)$ по времени выбегания T и всем точкам $z_{1,D}$ таким, что $T_1 z_{1,D} \in \partial D$. Другими словами, задача поиска минимального значения функционала действия по всем траекториям, начинающимся в стартовой точке и заканчивающимся на ∂D в произвольное время, разделяется на две отдельные задачи: первая, найти траекторию контроля с минимальной нормой, $\dot{g}_t$, которая приводит линейную систему контроля из стартовой точки к $z_{1,D}$ за произвольное время, а затем минимизировать результирующую целевую функцию по всем возможным конечным точкам $z_{1,D}$.

Первая задача это стандартная задача контроля, имеющая следующее решение:

$$I(z_{1,D}) = \frac{1}{2} z_{1,D}^{T} \cdot \overline{G}^{-1} \cdot z_{1,D}, \tag{21}$$

где $\overline{G}$ есть Грамиан достижимой подсистемы. Задача поиска минимального значения функционала действия затем становится тривиальной: минимизировать квадратичную функцию от $z_{1,D}$ на $\{z_{1,D} : T_1 z_{1,D} \in \partial D\}$. Решая эту задачу, мы находим наиболее вероятную точку выбегания, $T_1 z_{1,D}$, и темп сходимости, $\bar{I}$, который характеризует предельное поведение среднего времени выбеганий предельным равенством $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \varepsilon \ln E_x(\tau^{\varepsilon}) = \bar{I}$.

Литература

1. **Fuchs G.** Is error learning behavior stabilizing? Journal of Economic Theory, 20:300–317, 1979.
2. **Fuchs G. and Laroque G.** Dynamics of temporary equilibria and expectations. Econometrica, 44:1157–1178, 1976.
3. **Grandmont J.-M.** On endogenous competitive business cycles. Econometrica, 53:995–1045, 1985.
4. **Grandmont J.-M.** Expectations formation and stability of large socio-economic systems. Econometrica, 66:74–781, 1998.
5. **Grandmont J.-M. and Laroque G.** Stability of cycles and expectations. Journal of Economic Theory, 40:138–151, 1986.
6. **Bray Margaret M.** Learning, estimation, and the stability of rational expectations equilibria. Journal of Economic Theory, 26:318–339, 1982.
7. **Bray Margaret M. and Savin Nathan E.** Rational expectations equilibria, learning, and model specification. Econometrica, 54(5):1129–60, 1986.
8. **Fourgeaud Claude, Gourieroux Christian, and Pradel Jacqueline.** Learning procedures and convergence to rationality. Econometrica, 54(4):845–68, 1986.
9. **Marcet Albert and Sargent Thomas J.** Convergence of least squares learning mechanisms in self-referential linear stochastic models. Journal of Economic Theory, 48(2):337–68, 1989.
10. **Evans George W. and Honkapohja Seppo.** Learning, convergence, and stability with multiple rational expectations equilibria. European Economic Review, 38:1071–1098, 1994.

11. **Evans George W. and Honkapohja Seppo.** On the local stability of sunspot equilibria under adaptive learning rules. Journal of Economic Theory, 64:142–161, 1994.
12. **Evans George W. and Honkapohja Seppo.** Local convergence of recursive learning to steady states and cycles in stochastic nonlinear models. Econometrica, 63:195–206, 1995.
13. **Arifovic Jasmine.** Genetic algorithm learning and the cobweb model. Journal of Economic Dynamics and Control, 18:3.28, 1994.
14. **Kirman Alan P. and Vriend Nicolaas J.** Evolving market structure: An ACE model of price dispersion and loyalty. Journal of Economic Dynamics and Control, 25:459–502, 2001.
15. **In-Koo Cho and Sargent Thomas J.** Neural networks for encoding and adapting in dynamic economies. In H.M. Amman, D.A. Kendrick, and J. Rust, editors, Handbook of Computational Economics, pages 441–470. 1996.
16. **Marimon Ramon.** Learning from learning in economics. In David M. Kreps and Kenneth F. Wallis, editors, Advances in Economics and Econometrics: Theory and Applications., volume 1, chapter 9, pages 278–315. Cambridge University Press, Cambridge, 1997.
17. **Giannitsarou Chryssi.** Heterogeneous learning. Review of Economic Dynamics, 6:885–906, 2003.
18. **Honkapohja Seppo and Mitra Kaushik.** Learning stability in economies with heterogeneous agents. Review of Economic Dynamics, 9(2):284–309, 2006.
19. **In-Koo Cho and Kasa Kenneth.** Learning dynamics and endogenous currency crises. Macroeconomic Dynamics, 12:257–285, 2008.
20. **Sargent Thomas J.** Bounded Rationality in Macroeconomics. Oxford University Press, Clarendon Press, Oxford and New York, 1993.
21. **Evans George W. and Honkapohja Seppo.** Learning and Expectations in Macroeconomics. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2001.
22. **In-Koo Cho, Williams Noah, and Sargent Thomas J.** Escaping Nash inflation. Review of Economic Studies, 69(1):1–40, 2002.
23. **Williams Noah.** Escape Dynamics in Learning Models. PhD thesis, University of Chicago, 2001.
24. **Kolyuzhnov Dmitri, Bogomolova Anna and Slobodyan Sergey**. «Escape Dynamics: A Continuous-Time Approximation», Journal of Economic Dynamics and Control, 2014, 38(1), pp. 161–183. http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0165188913002029
25. **Freidlin M.I. and Wentzell A.D.** Random Perturbations of Dynamical Systems. Springer-Verlag, New York, second edition, 1998.
26. **Kasa Kenneth.** Learning, large deviations, and recurrent currency crises. International Economic Review, 45:141–173, 2004.

27. **Sargent Thomas J.** The Conquest of American Inflation. Princeton University Press, 1999.
28. **Williams Noah.** Stability and long run equilibrium in stochastic fictitious play. Manuscript, Princeton University, 2002.
29. **Williams Noah.** Adaptive learning and business cycles. Manuscript, Princeton University, 2003.
30. **Williams Noah.** Small noise asymptotics for a stochastic growth model. Journal of Economic Theory, 119(2):271–298, 2004.
31. **Bullard James B. and In-Koo Cho.** Escapist policy rules. Journal of Economic Dynamics and Control, 2005.
32. **Kandori Michihiro, Mailath George J, and Rob Rafael.** Learning, mutation, and long run equilibria in games. Econometrica, 61:29-56, 1993.
33. **Binmore Ken and Samuelson Larry.** Muddling through: Noisy equilibrium selection. Journal of Economic Theory, 74:235–265, 1997.
34. **Evans George W. and Honkapohja Seppo.** Adaptive learning and monetary policy design. Journal of Money, Credit, and Banking, 35(6):1045–72, 2003.
35. **Bullard James and Mitra Kaushik.** Learning about monetary policy rules. Journal of Monetary Economics, 49(6):1105–29, 2002.
36. **Dupuis Paul and Kushner Harold J.** Stochastic approximation and large deviations: Upper bounds and w.p.1 convergence. SIAM Journal on Control and Optimization, 27:1108–1135, 1989.
37. **Barro R.J. and Gordon D.B.** A positive theory of monetary policy in a natural-rate model. Journal of Political Economy, 91:589–610, 1983.
38. **Barro R. J. and Gordon D.B.** Rules, discretion, and reputation in a model of monetary policy. Journal of Monetary Economics, 12:101–121, 1983.
39. **Kydland Finn E. and Prescott Edward C.** Rules rather than discretion: The inconsistency of optimal plans. Journal of Political Economy, 85:473–491, 1977.
40. **Dembo Amir and Zeitouni Ofer**. Large Deviations Techniques and Applications. Springer, New York Berlin Heidelberg, 1998.
41. **Dahleh Mohammed, Dahleh Munther A. and Verghese George.** Lectures on dynamic systems and control. MIT lecture notes, 2004.